М. Б. Балк
Г. Д. Балк

Математические встречи

РЕПОРТАЖ С ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ

Балк М.Б., Балк Г.Д.
Математические встречи. Часть 2.

Книга представляет собой вторую из пяти частей пособия для факультативных занятий по математике в школе. В беседах ("встречах"), объединенных в небольшие циклы, обсуждаются общие и частные приемы поиска решений нестандартных задач. Материал излагается в виде диалогов учителя и учеников.

Предназначена для учащихся средней школы и для учителей математики.

Для ее чтения знакомство с первой частью не обязательно.

Рецензенты:
В.Д.Будаев, доктор физико-математических наук;
В.П.Василенков, кандидат физико-математических наук.

ISBN 5-88018-041-7

Редактор Л.В.Бушуева

Подписано к печати 31.01.95 г. Формат 60×84 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. п. л. 5,0. Уч.-изд. л. 5,0. Тираж 3000 экз. Заказ № 1006. Цена договорная.

Смоленский государственный педагогический институт
214000. Смоленск, ул. Пржевальского, 4.

Смоленская областная ордена «Знак Почета» типография им. Смирнова. 214000, г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2.

Качество печати соответствует качеству предоставленного издательством оригинал-макета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Небольшая книжка, которую вы сейчас держите в руках, - **вторая** в серии, объединенной общим названием "Математические встречи". Она предназначена, прежде всего, учащимся VIII классов, однако будет полезной и более старшим школьникам. Для чтения её *знакомство с книжкой "Математические встречи. Часть первая"* - **не обязательно.** Весь текст разбит на "циклы", а "циклы" - на "встречи". Отдельные "встречи" независимы между собой, так что можно начать чтение с любой " встречи" и кончить на любой другой. Ученик VIII- XI классов вполне может прочитать эту книжку самостоятельно. Но больше пользы он получит, если по ней его учитель математики проведет ряд факультативных занятий, в которых примет участие и этот ученик.

Книжку ни в коем случае **не** следует рассматривать как сценарий для факультативных занятий. В ней зафиксирован лишь **один** из многочисленных возможных вариантов проведения таких занятий по перечисленным темам. Каждый учитель проведет эти занятия по своему собственному варианту, с учетом особенностей, возможностей, запросов, интересов, подготовки того конкретного коллектива учащихся, с которым он проводит факультативные занятия. Однако наличие перед глазами учителя стенограммы занятий, проведенных другим учителем (и изложенных здесь), может помочь ему построить *свой собственный* вариант таких занятий.

В некоторые очерки ("встречи") включен - помимо основного материала - дополнительный, более трудный. Он отмечен звездочками (*), его можно при первом чтении безболезненно опустить. Учитель может этим дополнительным материалам уделить **отдельные** занятия факультатива.

В данной книге - как и в первой части - именно учитель (Георгий Данилович) формулирует условия всех задач, излагает весь необходимый вводный и связующий текст; в тексте это **каждый** раз отдельно не оговаривается.

ЦИКЛ I

ПОИСК ИСТИНЫ

В книге "Математические встречи. Часть 1" мы уже говорили о некоторых простейших общих приемах целенаправленного поиска решений математических задач (индукция, обобщение, экспериментирование). Здесь мы обсудим еще два общих приема. На уроках геометрии вы уже встречались со способом доказательства "от противного". Но рассуждения "от противного", как мы увидим, позволяют **не только доказать** некоторые истинные утверждения, но и **открыть** неизвестные истины. Другой прием, который может помочь найти правильные решения задач, - это рассуждения "от конца к началу". Об этих двух приемах поиска истины и пойдет речь на первых четырех встречах, описанных ниже.

Встреча 1. К истине - через нелепость.

> Доказательство "от противного", которое так любил Эвклид,- едва ли не самое изящное оружие математика. Это намного более красивый прием, чем любой шахматный гамбит: шахматист, чтобы добиться успеха, может пожертвовать пешку или даже фигуру; математик же идет на риск проигрыша всей партии.
>
> Г.Г. Харди[1]

Пролог

З а д а ч а 1. Я расскажу вам одну шахматную историю. "*Я вы-*

---

[1] Готфрид Гарольд Х а р д и (1876-1941) - английский математик, получил важные результаты в теории чисел и математической генетике.

шел конем из нижнего левого угла шахматной доски (рис.1), обошел всю доску, побывал в каждой клетке, и притом - только по одному

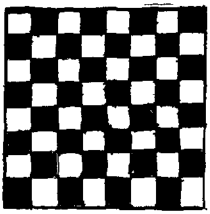

Рис. 1

разу, и закончил обход в верхнем правом углу".

Докажите, что я сказал неправду!

З а д а ч а 2. *Однажды Галилей, гуляя по городу, встретил своего приятеля Симпличио, большого любителя механики и математики.*

- Ты ведь знаешь, Галилео,- сразу начал рассуждать Симпличио,- что из двух предметов, свободно падающих с какой - нибудь высоты, быстрее упадет на землю более тяжелый...

- Сомневаюсь, - перебил приятеля Галилей.

- Как так? - удивился Симпличио.- Никто со времен Аристотеля в этом не сомневался, а ты сомневаешься! Я ведь имею в виду: в пустоте,- добавил он.

- И я это имею в виду, - ответил Галилей.- Я думаю, что высказанное тобой мнение попросту неверно.

- Так что же, - иронически посмотрел на Галилея Симпличио,- по-твоему, может случиться, что легкий предмет, свободно падая с какой-то высоты на землю, быстрее долетит до земли, чем тяжелый камень, падающий с той же высоты?

- Нет, так я не думаю, - спокойно возразил Галилей. - Я думаю, что при отсутствии атмосферы они упали бы на землю одновременно.

Как бы вы разрешили разногласие между Галилеем и Симпличио?

- С доказательством математических утверждений способом "от противного" вы уже встречались в школьном курсе геометрии. Суть его состоит в следующем. Пусть вам нужно доказать утверждение

$$\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{B} \qquad (1)$$

("**Е**сли утверждение **А** истинно, то истинно и утверждение **В**"). **Т**огда вы поступаете следующим образом.

1. Вы формулируете утверждение $\overline{\mathbf{B}}$, которое представляет собой отрицание утверждения **В** ($\overline{\mathbf{B}}$ **-** утверждение, "противное" утверждению **В**).

2. Вы **д**оказываете, что допущение

"Утверждение $\overline{B}$ - истинно"

приводит к противоречию (и,следовательно,допущение $\overline{\mathbf{B}}$ неверно,а верно утверждение **В**).

В чем же может проявиться это противоречие?

Вот наиболее важные случаи:

а) Утверждение $\overline{\mathbf{B}}$ противоречит самому утверждению **А** (условию интересующего нас утверждения (1)), то есть $\overline{\mathbf{B}}$ несовместимо с условием **А**, или же (что случается чаще) $\overline{\mathbf{B}}$ противоречит какому-нибудь следствию из условия **А** и из заведомо истинных утверждений.

б) Утверждение .

"Оба утверждения $\overline{\mathbf{B}}$ и А (и допущение, и условие) **истинны"** противоречит какому-нибудь заведомо истинному утверждению (например, аксиоме или известной теореме).

в) Из допущения ($\overline{\mathbf{B}}$) и из условия (**А**) удается вывести - привлекая, быть может, еще какие-то , заведомо истинные**,**утверждения - два следствия**,** которые несовместимы друг с другом.

Способ рассуждений "от противного" применяется не только для доказательства некоторых правдоподобных утверждений - он с успехом может быть использован и как прием целенаправленного **поиска** неизвестных фактов.

Начнем - для разминки - с такой несложной задачи.

З а д а ч а 3. *Я приглашаю к доске кого-нибудь из присутствующих - скажем, тебя, Ира. Даю тебе две монеты: двадцатирублевую и пятирублевую. Теперь я отворачиваюсь . Зажми одну из этих монет - какую хочешь, но молча, - в левом кулаке, а вторую - в правом. Но так, чтобы я не видел. Только запомни, какая монета в каком кулаке. Теперь число на монете, зажатой в левом кулаке, умножь на 2; число на монете из правого кулака умножь на 3. Сложи два полученных произведения; к результату прибавь 6. Новый результат раздели на 2. Разделилось ли нацело или нет? Ответь!* (Ира отвечает: "Нет"). *Я угадываю: у тебя в левой руке 20-рублевая монета!*

Как я это узнал?

– Я, кажется, поняла, Георгий Данилович, – сказала через две минуты Надя, – как Вы провели фокус. Вы, наверно, сказали себе:

"Допущу, что у Иры в левом кулаке – пятирублевая монета. Тогда в правом кулаке у нее – 20-рублевая".

Далее Вы сами выполнили те же действия, которые Вы предложили проделать Ире. Получили последовательно:

$5 \times 2 = 10$, $20 \times 3 = 60$, $10 + 60 = 70$, $70 + 6 = 76$.

Затем Вы стали делить последнее число на 2 и обнаружили, что оно делится на 2 нацело.

Если Ваше допущение правильно, то и Ира должна была бы получить тот же ответ. Но Ира сказала совсем другое: результат на 2 нацело не делится. Значит, заключили Вы сделанное Вами допущение не верно, то есть в левом кулаке у Иры – не 5-рублевая монета, у нее в левом кулаке 20 рублей (а в правом – пять). Вот и вся разгадка,– закончила Надя. И добавила: – Если можно, я проделаю этот фокус с кем-нибудь из присутствующих.

– Хорошо, – согласился учитель. И Надя удачно провела фокус.

– Теперь, – предложил Георгий Данилович, – обратимся к задаче N 1 из Пролога.

– Я докажу, Георгий Данилович, что Вы сказали неправду, – предложил Саша.

– Докажи.

– Допущу, что Вы сказали правду, и покажу, что это приведет меня к противоречию. Вы утверждаете, что вышли конем из левой нижней клетки и после этого в каждой клетке обязательно побывали, и притом – ровно по одному разу. А ведь всего клеток на доске имеется 64. Значит, ходов Вы сделали 63. Разве не так?

– Так, – согласился Георгий Данилович.

– А при каждом ходе коня,-продолжил рассуждать Саша,- меняется цвет той клетки, на которой он стоит: если конь стоял на белой клетке, то, совершив один ход, он перепрыгнет на черную клетку; а если он сейчас стоит, скажем, на черной клетке , то после своего прыжка он окажется уже на белой клетке, не так ли?

– Верно, – кивнул учитель.

– Поэтому если конь в начале обхода стоит на черной клетке, то после двух ходов он снова окажется на черной клетке. И то же будет после четырех, шести и вообще – после любого четного числа ходов. А после **нечетного** числа ходов он окажется уже на белой клетке.

- Без всяких сомнений, - подтвердил Георгий Данилович.

- Но Вы ведь начали обход с нижнего левого угла доски, а там, поглядите сами, *черная* клетка. И затем Вы совершили 63 хода, т.е. *нечетное* число ходов. Следовательно,

После обхода всей доски конь должен оказаться на ***белой*** *клетке.*

- Логично, - согласился учитель.

- Но ведь Вы утверждаете, что закончили обход в верхнем правом углу доски. А какого цвета там клетка?

- Сейчас посмотрю на доску.

- *В верхнем правом углу доски* ***черная*** *клетка*, - воскликнули хором ребята.

- Как видите, Георгий Данилович, - получается **противоречие**. Как это не прискорбно, приходится признать, что Вы сказали неправду.

Учитель и школьники рассмеялись.

- Теперь давайте обратимся к задаче N 2 из Пролога, - предложил Георгий Данилович.

- По-моему, без эксперимента здесь не обойтись, - сказала Лена. - Надо было Галилею и Симпличио взять два булыжника - один большой, а другой поменьше, - забраться на высокую башню, выпустить одновременно эти камни из рук и поглядеть - самим или попросить об этом свидетелей, - какой камень раньше грохнется об землю.

- Так и предложил поступить Симпличио, - сообщил Георгий Данилович. - Но Галилей не согласился! Вот как продолжался разговор между ними.

Симпличио. Так давай, Галилео, проделаем эксперимент: возьму два камня, большой и маленький, заберусь на нашу знаменитую башню, выпущу из рук эти камни одновременно, а ты внизу будешь наблюдать, одновременно они упадут на землю или нет! Ведь ты же сам горячий сторонник экспериментов!

Галилей. Это не тот случай, когда нужен эксперимент. Достаточно провести эксперимент **мысленно**. **Допущу** на минуту, что ты, Симпличио, прав. Соглашусь, временно, что верно твое утверждение:

"Из двух предметов, тяжелого и легкого, быстрее с данной высоты упадет на землю тяжелый".

Теперь я хочу тебя спросить: если один предмет перемещается быстро, а второй - медленно, и если их вдруг связать, изменится ли от этого скорость быстрого предмета?

Симпличио. Разумеется! Медленно перемещающийся предмет будет тормозить быстрый.

Галилей. Я предлагаю тебе связать - мысленно!- вместе тонкой бечевкой тяжелый камень и легкий камень. Как ты думаешь, эта связка быстрее доберется до земли, чем один тяжелый камень, или медленнее?

Симпличио. Наивный вопрос! Ведь в связке легкий камень тормозит тяжелый, так что, конечно же,

большой камень упал бы на землю быстрее, чем связка.

Галилей. Но ведь связка - тоже некоторый предмет, и она тяжелее большого камня. А я ведь согласился с тобой, что ты прав, что более тяжелый предмет быстрее упадет на землю, чем более легкий. Что же должно упасть на землю быстрее: связка или большой камень?

Сомпличио. Выходит, что

Связка упала бы на землю быстрее, чем большой камень.

Галилей. Заметь, Симпличио, что мы получили два **несовместимых** вывода. И только потому, что я согласился с твоим утверждением. Так правильно ли я поступил, когда согласился?

Симпличио. Выходит, что неправильно. Получается, что утверждение : "Из двух предметов, падающих в пустоте с одной и той же высоты на землю, быстрее упадет более тяжелый" - **неверно!** Но и более легкий не упадет быстрее... Значит, ты прав, Галилей:

Время свободного падения (в пустоте) тела не зависит от веса этого тела; оказывается, два тела, тяжелое и легкое, которые падали бы с одной и той же высоты на землю (при отсутствии на ней атмосферы), достигли бы поверхности земли одновременно!..

- Обсудим несколько новых задач.

З а д а ч а 4. *Точным кубом называется такое натуральное число, которое является кубом какого-то (вообще говоря, другого) натурального числа. Например, 8 - точный куб ($8 = 2^3$), 125 - тоже точный куб ($125 = 5^3$), а 7 не является точным кубом. Знаменитый математик Леонард Эйлер заинтересовался таким вопросом: Если сложить два точных куба, то может ли -хотя бы однажды - получиться точный куб? Эйлер доказал любопытную теорему:* **сумма** *двух точных кубов никогда не может оказаться точным кубом.*

Давайте выясним сегодня такой вопрос:

Может ли **разность** *двух точных кубов оказаться точным кубом?*

- Как бы вы стали искать ответ на этот вопрос? - спросил учитель.

- Мне кажется, - ответил Витя, - что надо разыскать доказательство Эйлера и посмотреть, нельзя ли в нашем случае рассуждать аналогично.

- А по-моему, - сказал Саша, - ответ и так ясен: "Не может".

- Как же ты это так быстро рассудил? - удивился Толя.

-Способом "от противного",-ответил Саша.- **Допущу**, что **может** разность двух каких-то точных кубов оказаться точным кубом. Это значит, что существует такая тройка натуральных чисел m, p, q, что $m^3 - p^3 = q^3$. Но тогда $p^3 + q^3 = m^3$. Значит, я тем самым показал, что существуют таких два точных куба, сумма которых тоже является точным кубом. *А это противоречит заведомо истинному утверждению Эйлера.* Значит, *мое допущение неверно.* Тем самым доказано, что **разность двух точных кубов никогда не может оказаться точным кубом.**

З а д а ч а 5. *Будем рассматривать дроби вида*

$n(n+1)/(2n+1)$, *где n - натуральное число.*

Таких дробей бесконечно много: (1x2)/3, (2x3)/5, (3x4)/7 *,и т. д.*

Докажите, что никто никогда не сумеет найти среди них ни одной, которая оказалась бы сократимой!

- Мы хотим доказать, - стал рассуждать Сережа, - что верно утверждение:

Ни при каком натуральном n дробь n(n+1)/(2n+1) не сократима.

Для доказательства **допущу противное:** *существует хотя бы один такой номер n, для которого эта дробь сократима.*

Это значит, что для этого номера n два числа $n\ (n+1)$ и $2n+1$ имеют общий делитель, больший, чем 1. Обозначу его через d. Тогда $d>1$, $(2n+1)$ делится на d, и $n(n+1)$ делится на d. Мне проще было бы рассуждать, если общий делитель оказался бы *простым* числом... Так как $d>1$, то d имеет простые делители. Пусть p - какой-нибудь **простой** делитель числа d. Тогда

$$p > 1, \qquad (1)$$

$2n+1$ делится на p, и $n(n+1)$ делится на p. Но тогда n делится на p или $n+1$ делится на p. Рассмотрю оба возможных случая:

Случай I. *n делится на p.* Так как еще и $2n+1$ делится на p, то и разность $[(2n+1)-n]$ делится на p, то есть $n+1$ тоже делится на p.

Случай II. *$n+1$ делится на p.* Так как еще и $2n+1$ делится на p, то и разность $[(2n+1)-(n+1)]$ делится на p, то есть n делится на p.

Вижу в обоих случаях, что оба числа n и $n+1$ делятся на p. Но тогда и их разность должна делиться на p, т.е. $[(n+1)-n]$ делится на p. Иначе говоря, число 1 делится на p. Но если 1 делится на какое-то натуральное число, то оно само обязано быть равно 1. Следовательно,

$$p = 1. \qquad (2)$$

Таким образом, из условия ("дробь имеет вид $n(n+1)/(2n+1)$") и допущения ("дробь сократима") мы получили два *противоречащих друг другу* следствия (1) и (2).

Следовательно, допущение не верно, то есть **доказано** утверждение:

При любом натуральном n дробь $n(n+1)/(2n+1)$ несократима.

Математическое интервью

- Однажды, - обратился к Вите Георгий Данилович, - на один склад было привезено несколько сотен ящиков с яблоками трех различных сортов: "белый налив", "осенний полосатый" и "антоновка". В каждом ящике были яблоки только одного сорта. Часть ящиков с яблоками была распродана, осталось только 28 ящиков, и притом все - закрытые. Как ты думаешь, Витя, можно ли, не раскрывая ящики, гарантировать, что среди них имеется не меньше десяти ящиков с яблоками одного и того же сорта? Способом от противного докажи, что ты прав!

- Думаю, - ответил Витя, - что было не менее 10 ящиков одного сорта. Докажу это. Допущу противное, то есть что не найдется на складе десяти ящиков с яблоками одного и того же сорта. Это значит, что ящиков с антоновскими яблоками не больше, чем 9, и то же верно для ящиков с яблоками двух других сортов. Отсюда следует, что всего ящиков на складе осталось не более 27. А по условию задачи их 28. Значит, допущение не верно. Итак, ответ на вопрос задачи: "Да, можно гарантировать".

Упражнения для размышления

1. В сумке находится сотня флажков: красных, желтых, зеленых, синих. Кроме цвета они ничем не отличаются. В темноте Толя выбирает флажки. Какое наименьшее число флажков должен Толя взять, чтобы среди них наверняка оказалось не менее 10 флажков одного и того же цвета? Дайте обоснование вашего ответа, рассуждая "от противного".

2. Мама испекла пирожки: 20 начиненных повидлом, 15 - мясом, 10 - творогом. Внешне они не отличаются один от другого. Какое наименьшее число пирожков достаточно взять (разламывать их нельзя), чтобы среди них наверняка оказалось не менее трех пирожков

а) с повидлом;

б) с одной и той же (безразлично, какой именно) начинкой;

в) с тремя различными начинками?

Дайте обоснование ваших ответов для каждого из этих трех случаев а), б), в).

***3**. Может ли в выпуклом многоугольнике быть больше трех острых углов? Дайте ответ и докажите, что ваш ответ - правильный!

***4**. Длины a, b, c сторон некоторого треугольника ABC связаны соотношением $a^3 + b^3 = c^3$. Обязательно ли он - остроугольный?

***5**. Докажите: на клетчатой бумаге нельзя нарисовать равносторонний треугольник так, чтобы его вершинами оказались вершины каких-то клеток.

Встреча 2. Схема выдвижных ящиков

Пролог

З а д а ч а 1. *Был ли в 1992 году такой день, который был днём рождения не меньше, чем для двадцати тысяч жителей Москвы?*

З а д а ч а 2. *На шахматной доске (размером 8 х 8) были выбраны наугад 65 точек (будем их называть "синими точками"). Оказалось, что все они расположены строго внутри клеток доски (но не на их границах) и никакие три из них не лежат на одной прямой. Нас теперь интересуют всевозможные треугольники, вершинами которых служат "синие точки" (будем их называть "синими треугольниками"). Найдется ли среди них хотя бы один, площадь которого меньше, чем площадь одной клетки?*

-С рассуждением "от противного" связана одна удобная схема решения задач. Сначала рассмотрим частный пример.

З а д а ч а 3. *В одном городе 20 тысяч жителей, все они принадлежат 30 национальностям. Верно ли, что среди них найдутся*

667 человек одной и той же национальности?

- Решение ее просто! - воскликнул Максим. - Допущу, что не найдутся. Тогда там жителей каждой национальности не больше, чем 666 человек; а всего в городе находилось бы не больше, чем 30 х ×666 = 19980 жителей. Но нам известно, что их больше (их 20000). Следовательно, 667 человек одной и той же национальности в этом городе обязательно имеются.

- Ты правильно решил задачу, - сказал учитель Максиму. - А я теперь вам расскажу, при чем здесь **выдвижные ящики.**

Немецкий математик Петер Лежен **Дирихле́** (1805-1859) успешно применял для решения задач такие наглядные соображения.

Пусть в каком-то шкафу имеются n выдвижных ящиков, и пусть какие-то предметы размещены в этих ящиках (не исключено, что некоторые ящики пустые, а в других - по нескольку предметов). Если нам заранее известно, что предметов больше, чем ящиков, то, выдвигая ящик за ящиком, мы обязательно хотя бы в одном из них обнаружим, по крайней мере, два предмета.

А если число всех предметов в ящиках больше, чем число ящиков, умноженное на некоторое натуральное число k (т.е. больше, чем n•k, где n - число ящиков), то хотя бы в одном ящике должно оказаться не меньше чем k+1 предметов.

Убедиться в справедливости этих двух утверждений легко способом от противного. Каждое из этих утверждений называют **принципом выдвижных ящиков** (первое - "**основным**", второе - "**обобщенным**"). Если бы мы хотели воспользоваться обобщенным принципом выдвижных ящиков при решении последней задачи (N **3**), то рассуждение Максима могло бы выглядеть примерно так:

Произведем (мысленно!) перепись жителей города, на каждого жителя заведем учетную карточку. Возьмем (опять-таки: только мысленно) шкаф с 30 ящиками -по числу национальностей жителей города. В ящик N 1 поместим карточки всех жителей национальности N 1, в ящик N 2 - карточки всех жителей национальности N 2, и так далее, до ящика N 30. Таким образом, все 20000 карточек на 20000 жителей окажутся в 30 ящиках. Попытавшись разделить 20000 на 30, мы обнаружим, что 20000 > 30 · 666. Следовательно, согласно обобщенному принципу выдвижных ящиков, хотя бы в одном ящике окажутся, по меньшей мере, 667(=666 + 1) карточек. Это и означает, что в городе имеется , по меньшей мере, 667 жителей одной и той же национальности. В данном случае n = 30, k = 666.

При решении задачи от нас, решающих задачу, зависит, каким образом выбирать "выдвижные ящики"; а от удачного выбора зависит и возможность, и простота решения.

При всей простоте своей формулировки принцип выдвижных ящиков позволяет решать довольно трудные задачи. Рассмотрим задачу N 1.

-Вряд ли мы сумеем её решить, если не знаем, сколько всего в Москве жителей, - заметила Надя.

-Это веское соображение,- согласился Георгий Данилович.- Известно, что в 1992 году больше восьми миллионов москвичей так или иначе отметили свой день рождения.

- Обозначу,- сказала Надя,- через N число всех москвичей, отметивших свой день рождения в 1992 году. На каждого заведу (мысленно!) карточку, в которой укажу дату его рождения. Затем воображу себе шкаф, в котором 366 ящиков - по числу дней в 1992 году (год был високосный). В ящик N 1 помещу карточки тех москвичей, у которых день рождения - 1 января; в ящик N 2 - карточки тех, которые отмечают свой день рождения 2 января; и.т.д. Тогда все N карточек окажутся в 366 ящиках. Учту, что $N > 8 \cdot 10^6 = 366 \cdot 21857 + 338 > 366 \cdot 20000$. В силу обобщённого принципа выдвижных ящиков (при $n=366$, $k=20000$) хотя бы в одном ящике окажется больше 20000 карточек; а это означает, что был по меньшей мере один такой день, который был днём рождения более чем для 20000 москвичей.

З а д а ч а 4. *Решим задачу, которая возникнет, если в задаче N 2 число "синих точек" не 65, а вдвое больше: 130.*

- Я бы сначала выяснил, - уверенно заявил Андрей, - обязательно ли найдется - среди 64 клеток шахматной доски - хотя бы одна, содержащая не меньше 3 "синих точек". Разделю 130 на 64. Получу: $130 = 64 \cdot 2 + 2 > 64 \cdot 2$. Рассматривая каждую клеточку доски как некоторый "выдвижной ящик", вижу: в силу обобщенного принципа выдвижных ящиков (при $n = 64$, $k = 2$) обязана найтись среди клеток хотя бы одна, в которой "синих точек" будет не меньше, чем $2 + 1 = 3$. Площадь треугольника с вершинами в этих точках будет меньше площади одной клетки.

-Теперь,- предложил Георгий Данилович,- попытаемся разобраться с з а д а ч е й N 2.

- В том случае, - сказала Ира, - когда в какой-нибудь клетке окажутся три "синие" точки (или больше), то на вопрос задачи следует ответить: "Да". А вот в остальных случаях (когда в каждой клетке не больше двух синих точек) картина не ясна...

- Как это может случиться, - размышлял Витя, - чтобы три точки A, B, C не лежали в одной клетке шахматной доски, а площадь треугольника ABC оказалась меньше площади одной клетки?

- Вот давайте, - предложил Вадим, - возьмем , например, три "синие" точки A, B, C *в двух смежных клетках*, образующих прямоугольник размером 2 x 1 (рис.1). Будет ли площадь треугольника ABC меньше или больше площади одной клетки? Или же может случиться и то и другое - в зависимости от положения точек A, B, C в прямоугольнике?

- Давайте примем длину клетки за 1 единицу, - внесла свое предложение Лена.

- Если две "синие" точки - например, A и B, - подметил Андрей, - расположены на одинаковом расстоянии от одной и той же большей стороны прямоугольника (как на рисунке 1), то $AB < 2$, высота треугольника $h < 1$, и получаем для площади треугольника:

$$S_{ABC} = 1/2\ AB \cdot h < 1 .$$

А если расстояние всех трех точек A, B, C от одной и той же большей стороны прямоугольника различны (рис.2), тогда мне не ясно, как поступить.

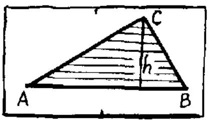

Рис.1

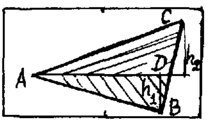

Рис.2

- Я бы, - обратился Саша к Андрею, - свел этот случай к предыдущему, уже рассмотренному тобой: я бы разбил треугольник ABC на два треугольника прямой линией, параллельной большей из сторон прямоугольника. Вот посмотри. Пусть для конкретности картина такая, как на рисунке 2: расстояние точки A от большей стороны прямоугольника заключено между расстояниями от той же стороны точек B и C. Тогда проведу через A прямую, параллельную большей стороне прямоугольника; она разобьет треугольник ABC на два: ADB и ADC. Используя обозначения, которые приняты на рис.2, имею:

$$S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ADC} = 0,5 \cdot AD \cdot h_1 + 0,5 \cdot AD \cdot h_2 = 0,5 \cdot AD \cdot (h_1 + h_2).$$

Но $AD < 2$, $h_1 + h_2 < 1$, и поэтому $S_{ABC} < 1$.

- Получается, - заключила Ира, - что при любом выборе трех точек *A*, *B*, *C* внутри двух **смежных** клеток шахматной доски площадь треугольника *ABC* будет меньше площади одной клетки:

$$S_{ABC} < 1.$$

- Но теперь, - сказал Толя, - можно для решения исходной задачи (N 2) воспользоваться принципом выдвижных ящиков.

- Что же здесь считать за "ящик"? Клетку шахматной доски, что ли? - прикидывала Лена.

- Нет, - отверг это предложение Толя,- это нам ничего не даст. Нам надо воспользоваться тем, что мы только что узнали о прямоугольниках, составленных из *двух смежных* клеток. Думаю, что такой прямоугольник и надо принимать за "ящик". Итак, предлагаю: давайте разобьем весь квадрат (8 x 8) на прямоугольные ячейки размером 2 x 1, причем, для конкретности, пусть разбивка такова, что у каждой ячейки сторона длиною в 2 единицы параллельна нижней стороне доски (рис.3). Эти прямоугольные ячейки и будут наши "выдвижные ящики". Всего таких "ящиков" окажется 64:2 = 32; а в них находятся 65 "синих" точек. Так как $65=32\cdot 2+1 > 32\cdot 2$ (n = 32, k = 2), то (согласно обобщенному принципу выдвижных ящиков) хотя бы в одной из прямоугольных ячеек обязаны оказаться, по крайней мере, три "синих" точки. Треугольник с вершинами в этих точках будет иметь площадь меньшую, чем 1. Задача решена.

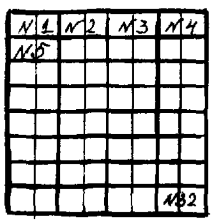

Рис.3

Упражнения для размышления

1. Ира выбрала каких-то 33 различных натуральных числа, из которых ни одно не делится на 33. Затем она стала составлять всевозможные разности между этими числами (каждый раз вычитая из большего числа меньшее). Обязательно ли среди этих разностей найдётся такая, которая разделится на 33?

2 Заказ № 1006

Чтобы решить задачу, мысленно рассортируйте числа, отобранные Ирой, по их остаткам от деления на 33.

2. В этом заклеенном конверте лежит листок, на котором Витя записал каких-то 510 различных трёхзначных чисел. Можете ли вы гарантировать, что среди них найдутся два таких числа, из которых одно делится нацело на другое?

Для решения задачи мысленно рассортируйте числа, записанные Витей, по их наибольшему нечётному делителю.

Встреча 3. Начни с конца!

Не все пропало,
Поверь в себя.
Начни с начала,
Начни с нуля.
А. Вознесенский

Пролог

З а д а ч а 1.- *Давайте,* - сказал школьникам Георгий Данилович, - *сыграем в одну арифметическую игру. Мы с вами называем два каких -либо целых числа: одно (обозначу его N - "эн большое") - между 50 и 150, а второе (n - "эн малое") - между 5 и 15. Например, мы с вами возьмём $N = 77$, $n = 8$. Затем я приглашаю к доске кого-нибудь из вас - скажем, Сашу, - и игра начинается так. Саша называет любое целое неотрицательное число, но не большее, чем n (в нашем случае - одно из чисел $0,1,2,\dots,8$; например, 6). Затем мой ход, и я должен прибавить к числу, названному Сашей, любое целое положительное число между 1 и n (в нашем случае - любое из чисел $1,2,\dots,8$); полученную сумму я называю вслух (в данном случае 14). После этого Саша должен прибавить к названному мною числу какое-нибудь натуральное число между 1 и n и назвать вслух полученную сумму* (например, он прибавляет к 14 число 1 и называет сумму 15). *Затем я поступаю аналогично. И так далее. Выигравшим считается тот из нас двоих, кто назовет число N (в данном случае - число 77).* Вот я сейчас сыграю с Сашей, и вы увидите, что я выиграю (игра проводится на самом деле). *Задача состоит в следующем: как должен Саша играть, чтобы выиграл не я, а он?*

- Вопреки рекомендации поэта, процитированной в эпиграфе, при поиске решения математических задач нередко (но, разумеется, далеко не всегда) полезнее воспользоваться советом диаметрально противоположного содержания: "Начни с конца!"

Решение задачи состоит из некоторой цепочки "шагов", и поиск этой цепочки, оказывается, далеко не всегда выгодно начать с **первого** шага - нередко выгоднее начать с всестороннего осмысления **последнего** шага, завершающего решение! Говоря подробнее, речь идет о следующем приеме целенаправленного (т.е. не наугад) поиска.

Начинаешь поиск решения с предположения, что задача тобой уже решена (искомая фигура уже построена, искомый алгоритм тобой уже сформулирован, искомые неизвестные уже вычислены и т.п.). Затем отдаешь себе отчет, каким должен быть **последний** шаг в решении. После этого выясняешь, каким должен был оказаться **предпоследний** шаг, **предпредпоследний** шаг, и так далее - до тех пор, пока не доберешься до первого шага решения. После всего этого, т.е. поняв, каковы все "шаги", из которых должно быть составлено решение, ты можешь затем изложить решение в естественном порядке - от начала к концу.

- Вернемся к задаче 1. Послушаем рассуждения Саши, применяющего к поиску решения идею "Начни с конца!"

- Поиск решения я начну с конца! Пусть я уже выиграл, пусть уже на **последнем** шаге я назвал число 77. Какое же самое большое число мне следовало назвать на **предпоследнем** шаге, чтобы Георгий Данилович не мог выиграть? Если бы я назвал, скажем, 76, то Георгий Данилович прибавил бы к нему 1, назвал бы 77 и выиграл бы. Значит, число 76 мне назвать никак нельзя было. А 75? Тоже нет. По той же причине мне нельзя было назвать 74, 73, ..., 70, 69. Мне надо было на **предпоследнем** шаге назвать число 68 - вот тогда при *любом* ходе, Георгия Даниловича я выиграю!

Но чтобы иметь возможность на предпоследнем шаге назвать число 68, мне нужно было знать, какое число должен я назвать на **предпредпоследнем** шаге. Назвать число 67? Нет, оно не подойдет. 66 - тоже... даже 60 не подойдет... Мне надо было назвать число 59. Тогда при *любом* ходе Георгия Даниловича я сумею назвать число 68 . Если и дальше так рассуждать, то ясно, что мне нужно было назвать числа 68, 59, 50, 41, 32, ... Они получаются из числа

77 вычитанием чисел вида $9k$, где $k=1,2,\dots$ Наименьшее неотрицательное число вида $77-9k$ - это остаток от деления числа 77 на 9, т.е. число 5. Итак, я должен начать игру с того, что назову число 5; а затем мне надо на каждом моем шаге прибавить 9 к ранее названному мною числу, т.е. назвать числа 14 (=5+9), 23 (=14+9), 32 (=23+9), 41 (=32+9), и т.д. При этом я наверняка выиграю - даже не интересуясь какие числа будет называть Георгий Данилович, даже если я закрою уши!

Точно так же я могу выиграть при любом выборе чисел N и n: я разделю N на $n+1$, найду остаток от деления (обозначу его буквой d) и затем буду называть числа

$$d,\ d+(n+1),\ d+2(n+1),\dots$$

После некоторого числа шагов я назову число N и выиграю - независимо от того, какие числа назовет мой противник.

- Каждый из нас может убедиться в эффективности сформулированного мною алгоритма: пользуясь им, вы можете выиграть, например, у меня, - закончил Саша.

- Давайте, - предложил Георгий Данилович, - поупражняемся в применении приема "Начни с конца!". Рассмотрим одну очень простую задачу.

З а д а ч а 2. *Я задумал число , прибавил к нему 5, сумму разделил на 5, из частного вычел 5, умножил результат на 5 и получил 5. Какое число я задумал?*

- Конечно, - откликнулась Лена, - несложно решить эту задачу так: обозначить неизвестное число буквой x и составить уравнение, которому x удовлетворяет. Но я хочу получить ответ приемом

	Сколько получил
Задумал число	25
После прибавления к нему 5 (до деления)	30
После деления на 5 (до вычитания)	6
После вычитания 5 (до умножения)	1
После умножения на 5 (в конце)	5

"Начни с конца!". Рассуждаю так. В конце получено число 5. Оно получено **после** умножения некоторого, ранее полученного, числа на

5. Значит, **до** умножения я имела число 1. Но 1 я получила **после** вычитания... И так далее. Ход рассуждения удобно собрать в такую таблицу (здесь левая колонка заполняется "сверху вниз"; а правая - "с н и з у в в е р х", по ходу рассуждения):

- Вижу, - заключила Лена, - что было задумано число 25.

- Теперь я предложу, - сказал Георгий Данилович, - одну старинную народную задачу.

З а д а ч а 3. *Однажды, вечером, на постоялый двор постучались три путника - три брата. Они попросили хозяйку сварить им на ужин картофель "в мундире". Пока хозяйка варила картофель, братья уснули. Через час проснулся старший брат, увидел на столе сваренный картофель, отсчитал себе одну треть всех сваренных картофелин, съел их и опять уснул. Через некоторое время проснулся средний брат, и, не зная, что старший брат уже ел картофель, тоже отсчитал одну треть имевшихся картофелин, съел их и тоже уснул. Наконец, проснулся младший брат и сделал то же, что сделали его братья. Когда братья утром проснулись, они - к своему удивлению - обнаружили, что почему-то остались еще 8 картофелин, хотя каждый* был уверен, *что съел причитавшуюся ему* третью *часть картофеля. Но в разговоре они вскоре всё выяснили. Спрашивается: сколько картофелин приготовила им хозяйка?*

- Вот способ решения, - сказал Гена: - обозначить число картофелин через x и составить уравнение.

- Неплохой способ, - прокомментировал предложение Гены учитель. И добавил: -Неплохо, если вы дома решите задачу этим способом. Но здесь попробуй, Гена, решить эту задачу "с конца".

- Последний, третий по порядку, остаток, - стал рассуждать Гена, - оставленный младшим братом, составил 8 картофелин. Но младший брат съел 1/3 *второго* остатка - а, значит, оставил 2/3 второго остатка. Таким образом,

2/3 второго остатка составляют 8 картофелин,

1/3 второго остатка составляет 4 картофелины,

весь второй остаток (3 трети) - 12 картофелин.

Итак, средний брат оставил 12 картофелин.

Но он **съел** 1/3 *первого* остатка и, следовательно, **оставил** 2/3 *первого* остатка. Поэтому

2/3 первого остатка составляют 12 картофелин,

весь первый остаток - 18 картофелин.

Итак, старший брат оставил 18 картофелин.

Но он съел 1/3 того, что было *вначале*, *а*, следовательно, *оставил 2/3 начального* количества картофеля. Поэтому

2/3 начального количества картофеля составляют 18 картофелин;

а *все* начальное количество картофеля составляло 27 штук.

Итак, хозяйка приготовила братьям 27 картофелин.

- Все эти данные, - заметил Георгий Данилович, - удобно, по ходу решения задачи, занести в таблицу, в которой я - по ходу решения - заполняю правую колонку " **с н и з у в в е р х** ":

	было картофелин
Вначале	27
I остаток (оставил старший брат)	18
II остаток (оставил средний брат)	12
III остаток (оставил младший брат)	8 ↑

З а д а ч а 4. *В каждой из пяти коробок имеются орехи. Из первой коробки переложили во вторую одну пятую часть всех орехов, имевшихся в первой коробке. Из оказавшихся после этого во второй коробке орехов одну пятую часть переложили в третью коробку. После этого сходным образом поступили с орехами, оказавшимися в третьей и четвертой коробке. Наконец, из орехов, оказавшихся после четвертого перекладывания в пятой коробке, переложили одну пятую часть в первую коробку. После этого оказалось, что во всех пяти коробках - по 400 орехов. Сколько было орехов в каждой из пяти коробок до перекладываний?*

- Конечно, - сказал Вадим, - можно было бы ввести обозначения для пяти неизвестных и составить уравнения, которым эти неизвестные удовлетворяют. Но давайте лучше решим эту задачу иначе: **с к о н ц а.**

- Расскажи, как бы ты это стал делать, - обратился к Вадиму учитель.

- После пятого перекладывания в пятой коробке оказалось 400 орехов. Это получилось после того, как мы из пятой коробки изъяли одну пятую часть ее содержимого, - а, значит, **оставили** там 4/5 -

ее содержимого. Но, с другой стороны, там **было оставлено** 400 орехов. Значит, **до пятого** перекладывания содержимое пятой коробки составляло 500 орехов. Итак, **до** пятого перекладывания (т.е. после четвертого перекладывания) в пятой коробке имелось 500 орехов, в первой - 300, в остальных - по 400. Аналогично можем подсчитать, сколько было орехов до четвертого, до третьего и т.д. перекладывания. Результаты удобно занести в такую таблицу (строки чисел заполняю **снизу вверх**):

	Сколько было орехов в коробке				
	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5
До первого перекладывания (т.е. в самом начале)	375	425	400	400	400
До второго перекладывания (т.е. после 1-го)	300	500	400	400	400
До третьего перекладывания (т.е. после 2-го)	300	400	500	400	400
До четвертого перекладывания (т.е. после 3-го)	300	400	400	500	400
До пятого перекладывания (т.е. после 4-го)	300	400	400	400	500
В конце (после 5-го перекладывания)	400	400	400	400	400↑

Некоторого разъяснения требует, быть может, последний этап (см. вторую строчку таблицы). **До первого** перекладывания (то есть, **вначале**) в коробке N 1 было какое-то число орехов; когда мы из этого количества отобрали одну пятую часть (а, значит, оставили 4/5 содержимого), то там осталось 300 орехов; следовательно, **до первого перекладывания** было там 300:(4/5)= 375 орехов. Но при первом перекладывании мы переложили в коробку N 2 из коробки N 1 одну пятую часть содержимого этой коробки N 1, то есть

375:5=75 орехов; а так как **после** первого перекладывания там стало 500 орехов (см. строчку N 2), то **до** первого перекладывания, то есть **первоначально**, в коробке N 2 было 500 - 75=425 орехов.

Математическое интервью

З а д а ч а 5. *Вот перед тобой, Андрей, на доске записаны подряд 50 минусов. Представь себе, что тебе предстоит сыграть против лучшего математика десятого класса в такую игру. Вам - тебе и ему - нужно будет поочередно переправлять минусы на плюсы, причем каждый должен при своем ходе переправить не меньше одного и не больше трех минусов. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Первый ход предоставляется тебе. Как должен ты начать игру, чтобы выиграть?*

- Поиск решения, - начал рассуждать Андрей после некоторого размышления, - начну с конца. В конечном итоге должно оказаться, что я переправлю *последние* минусы: один, два или три - сколько их мне оставит десятиклассник. Сколько же минусов мог бы я ему оставить после моего *предпоследнего* хода, чтобы он - при любом своем ходе - не выиграл? Один? Это плохо: десятиклассник переправит его на плюс и выиграет. Два или три? - Тоже плохо... Хорошо бы оставить ему 4 минуса - тогда при любом его ходе я выигрываю. Итак, на последнем моем ходе я должен зачеркнуть 46-й минус. А для того, чтобы мне была гарантирована возможность это сделать, мне следовало на *предпред*последнем моем ходе зачеркнуть 42-ой минус. И так далее. Мне ясно, что я должен зачеркнуть 38-ой, 34-ый, 30-ый минус, и так далее. Вообще, я выигрываю, если мне удастся при каждом моем ходе зачеркнуть минусы, имеющие номера вида 50-4k, где k - натуральное число. Наименьшее неотрицательное число такого вида - это остаток от деления 50 на 4, т.е. число 2; в самом деле, $2 = 50 - 4\cdot 12$. Значит, чтобы гарантировать себе выигрыш, я должен начать с зачеркивания первых **двух** минусов; затем после каждого моего очередного хода число всех зачеркнутых минусов должно (независимо от хода моего противника) увеличиться на 4. Через 12 моих ходов после начала (т.е. на 13-ом ходе) наверняка я выиграю.

З а д а ч а 6. *Вообрази себе, Толя, что перед тобой бочонок и что в нем имеется не менее 10 литров молока (точное количество неизвестно). Кроме того, в твоем распоряжении имеется бачок,* *вмещающий в точности 7 литров, и бидон на 3 литра. Предложи способ, как отлить из бочонка в бачок 5 литров молока.*

- Начну с конца! - подумав, сказал Толя. - Пусть задача уже решена: в бачок уже налито 5 литров молока. Как могло там оказаться 5 литров, если я умею отлить в бачок 7 литров? Это могло бы получиться, в частности, если бы я до этого, на предшествующем этапе, отлил из полного (7-литрового) бачка 2 литра. Но каким образом я из него мог бы отлить 2 литра? Я мог бы это сделать, если на еще более раннем этапе сумел бы оставить в 3-литровом бидоне 1 литр молока. Но каким образом мог бы я вообще отлить 1 литр молока? Это мне ясно: надо из полного 7-литрового бачка отлить, используя 3-литровый бидон, 6 литров. Но это я умею сделать. Теперь мне ясно, как решить задачу.

Решение приведу в виде такой таблички:

	Содер-жит в начале	Содержит после переливания								
		N 1	N 2	N 3	N4	N5	N 6	N 7	N 8	N 9
Бачок (7л)	0	7	4	4	1	1	0	7	5	5
Бидон (3л)	0	0	3	0	3	0	1	1	3	-
Бочонок (не менее 10л)	всё	остаток	остаток	остаток	остаток	остаток	остаток	остаток	остаток	остаток

Упражнения для размышления

1. В одном личном чемпионате по теннису участвовали 1025 человек. Сначала некоторые из участников сыграли между собой по одной партии, причем каждый из проигравших партию выбыл из игры. В дальнейшем соревновании участвовали лишь те игроки, которые выиграли свою партию, и те, которые еще не играли. Некоторые из этих участников сыграли между собой по одной партии, проигравшие выбыли из игры, а из остальных (выигравших и еще не игравших вовсе) снова некоторые сыграли между собой по одной партии. И так далее - до тех пор, пока не определился победитель. Сколько всего партий было сыграно?

2. Улов енота[1]

Енот с рыбалки шел домой.
Шагал и понемножку
Он половину рыбок съел.
И плюс еще рыбешку.

Шёл, шёл и у большой сосны
Лесную встретил кошку.
И с нею пол-остатка съел.
Да плюс еще рыбешку.

Спешил. Но там, где поворот
На узкую дорожку,
Он снова пол-остатка съел.
И плюс еще рыбешку.

Когда ж явился он домой
И заглянул в лукошко,
На дне лежала у него
Всего одна рыбёшка.

Кто сможет выполнить расчет
Спокойно, без ошибок,
Тот скажет: сколько же енот
Поймал на речке рыбок?

Встреча 4. Дороги, которые мы выбираем

> Да здравствуют искатели дорог!
> Ведь тяжело лишь переступить порог...
>
> Л.Мартынов

Пролог

З а д а ч а 1. *В некотором царстве, в некотором государстве имеется сеть автомобильных дорог (см. схему на рисунке 1). Отдельные участки дорог условно изображены отдельными прямолинейными отрезками - хотя на самом деле они, возможно, имеют форму каких-то кривых линий. Длина каждого участка указана на схеме. Стрелки на участках показывают, в каком направлении разрешается ехать по каждому участку. Требуется добраться из пункта А в пункт В кратчайшим путем. Как вы предлагаете выбрать такой маршрут?*

- Идея "Начни с конца!" неожиданно нашла важные приложения к задачам, в которых требуется из всех возможных вариантов выбрать "самый лучший", "самый выгодный" (оптимальный). Задача N 1 - ти-

---

[1] Составителям данной книги не удалось установить, кто является автором этой задачи-стихотворения и где она была опубликована впервые. Будем благодарны читателям книги, которые помогут нам найти автора этого стихотворения.

пичный пример оптимизационной задачи. Процесс ее решения естественно распадается на отдельные "шаги" (на каждом "шаге" делается выбор, в каком направлении следует двигаться). Количество всех возможных вариантов в подобных "многошаговых" задачах часто огромно, и попытка выбрать из них "вслепую" лучший вариант потребовала бы больших затрат времени и сил. В течение трех последних десятилетий были разработаны в математике новые методы, приспособленные к решению многошаговых оптимизационных задач. Был создан новый раздел математики, который получил название "Динамическое программирование". Идея "Начни с конца" играет в одном из этих методов важную роль. Она позволяет упорядочить перебор, сделать его направленным, быстро отбросить многочисленные варианты, которые не могут претендовать на то, чтобы оказаться "наилучшими". С ее помощью мы немного позднее решим задачу N 2. Но предварительно обсудим более простую задачу того же типа.

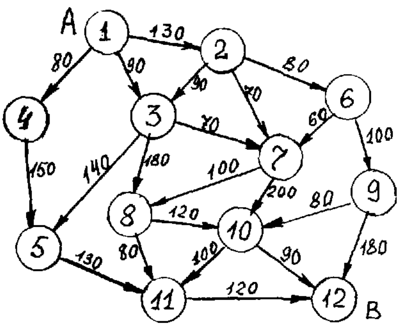

Рис. 1

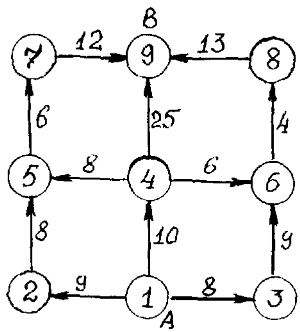

Рис. 2

З а д а ч а **2**. *Имеется сеть шоссейных дорог, которая схематично изображена на рисунке 2. Она содержит девять узлов, которые соединены участками шоссе (перегонами). Последние изображены на схеме в виде прямолинейных отрезков - хотя на самом деле они имеют искривления и повороты. На схеме рядом с каждым перегоном указано, во сколько рублей обойдется автомобилисту проезд по этому перегону (сюда входят расходы на бензин, на амортизацию машины, и т.п.). На каждом перегоне движение одностороннее, и черная стрелка указывает направление разрешенного движения (от узла с меньшим номером к узлу с большим номером). Автомобилисту нужно проехать из пункта A в пункт B . Какой маршрут ему следует выбрать, чтобы расходы на проезд были минимальными?*

- В данной задаче,- сказал Георгий Данилович, - мы могли бы без труда найти оптимальный вариант простым перебором всех возможных вариантов - ведь их немного. Однако мы всё же попытаемся решить эту задачу иначе - так, чтобы обнаружилась некоторая общая идея решения подобных задач.

А подход наш будет заключаться в следующем. Мы будем решать более общую задачу: найдем не только для стартового узла (*N* 1),но для всех узлов (*N* 1 - *N* 8) оптимальные маршруты от этих узлов до финиша (т.е. до узла *N* 9). **Перебор же узлов начнем "с конца",** т.е. в следующей последовательности: сначала рассмотрим узел *N* 8, затем - узел *N* 7, и так далее, пока не доберемся до узла *N* 1. Условимся об обозначениях, которые позволят нам сделать записи достаточно краткими. Если какой-то перегон имеет своим началом узел Ni (номер i), а концом - узел Nj ($i < j$), то стоимость проезда в рублях по этому перегону условимся обозначать так: $P(i;j)$ (буква P должна нам напомнить слово "перегон"). Например, $P(1;4)=10$; $P(4;9)=25$; $P(8;9)=13$(*рублей*).

Для каждого узла (Ni) выясним два вопроса:

1) Какова наименьшая возможная стоимость проезда от этого узла до финиша? Иначе говоря, какова стоимость проезда от узла (Ni) до узла N 9 по наиболее выгодному, оптимальному маршруту? Это число обозначим так: S(1) (буква S нам напомнит слово "стоимость").

2) По какому перегону нам стоит начать двигаться, если хотим из рассматриваемого узла (Ni) добраться к финишу наиболее выгодным путем? Иначе можно то же самое выразить так: на оптимальном пути, ведущем из узла Ni к финишу, какой узел "ближе всего" к узлу Ni? Номер этого ближайшего узла обозначим через $B(i)$ (буква "B " пусть напомнит нам слово "ближайший"). На рисунке 2 мы направление движения от узла Ni до узла $B(i)$ будем в дальнейшем отмечать пунктирной стрелкой.

Итак, начинаем перебор узлов. Рассмотрим сначала узел *N* 8.От него ведет к узлу *N* 9 только один перегон, проезд по нему стоит 13 рублей. Поэтому

$$S\ (8) = 13\ (р)\ , \qquad B\ (8) = 9.$$

Перегон (N 8 - N 9) на рис.2 отмечаем пунктирной стрелкой - см. рис.3.

Аналогично обстоит дело с узлом *N* 7:

$$S(7) = 12\ (р), \quad B\ (7) = 9.$$

Отмечаем пунктирной стрелкой перегон (N 7 - N 9)

Обратимся к узлу N 6. Из него ведет к узлу N 9 только один маршрут - через узел N 8. Стоимость проезда по этому маршруту составляет

$$P\ (6;8)\ +\ S\ (8)\ =\ 4+13\ =\ 17\ (р).$$

По этому маршруту ближайшим к узлу N 6 является узел N 8. Итак,

$$S\ (6)\ =\ 17\ (р),\quad B\ (6)\ =8.$$

Пунктирной стрелкой отмечаем перегон (N 6 - N 8).

Аналогично убедимся, что

$$S(5)=P(5;7)+S(7)=6+12=18\ (р),\ B(5)=7.$$

Отмечаем пунктирной стрелкой перегон (N 5 - N 7).

Сложнее с узлом N4. Из него можно добраться до финиша (узел N9):

а) либо проездом через узел N 5 - это будет стоить:

$$P(4;5)+S(5)=8+18=26\ (р);$$

б) либо проездом через узел N 6 - стоимость будет такой:

$$P(4;6)+S(6)=6+17=23\ (р);$$

в) либо проездом "напрямик", по перегону с началом в узле N 4 и концом в узле N 9; стоимость проезда составит

$$P\ (4;9)\ +\ S\ (9)\ =\ 25\ +\ 0\ =\ 25\ (р).$$

Дешевле всего обойдется проезд в варианте (б), т.е. если ехать через узел N 6. Поэтому

$$S\ (4)\ =\ 23\ (р),\quad B\ (4)\ =\ 6.$$

Пунктирная стрелка - на перегоне N 4 - N 6.

С узлами N 3 и N 2 дело обстоит проще, так как из каждого из них ведет только один маршрут к финишу. Легко видеть, что

$$S\ (3)\ =\ P\ (3;6)\ +\ S\ (6)\ =\ 9+17\ =26\ (р),\ B\ (3)\ =\ 6.$$

$$S\ (2)\ =\ P\ (2;5)\ +\ S\ (5)\ =\ 8+18\ =26\ (р),\ B\ (2)\ =\ 5.$$

Пунктирными стрелками отмечаем перегоны (N 3 - N 6) и (N2 - N5).

Наконец, разберемся с узлом N 1. От него можно добраться до финиша (узел N 9)

а) либо через узел N 2 - это будет стоить

$$P\ (1;2)\ +\ S\ (2)\ =\ 9+26\ =35\ (р),$$

б) либо через узел N 3 - это будет стоить

$$P\ (1;3)\ +\ S\ (3)\ =\ 8+26\ =34\ (р),$$

в) либо через узел N 4 - это будет стоить

$$P\ (1;4)\ +\ S\ (4)\ =10+23\ =33\ (р).$$

Дешевле всего - через узел N 4. Поэтому

$$S\ (1)\ =\ 33\ (р),\ B\ (1)\ =\ 4.$$

Отмечаем пунктирной стрелкой перегон (N 1 - N 4).

Цепочка пунктирных стрелок на рисунке 3, начинающаяся у узла N 1 и заканчивающаяся у узла *N* 9, укажет "зеленую улицу" для оптимального (наиболее дешевого) маршрута. Это будет маршрут, проходящий через узлы с номерами 1, 4, 6, 8, 9; стоимость проезда по нему составляет

$$S\ (1)\ =\ 33\ (\text{рубля}).$$

– Это всё убедительно и понятно, – заметил Максим.

– Давайте тем же приемом решим задачу *N* 2 из Пролога, – продолжил Георгий Данилович. – Только теперь пусть $P\ (i;j)$ означает **длину** перегона, соединяющего узел Ni с узлом Nj; $S(i)$ – **длину** (в километрах) кратчайшего пути, ведущего от узла Ni до финишного узла (N 12); а $B\ (i)$ – номер узла, **ближайшего** к узлу Ni (если двигаться по кратчайшему пути).

– Я бы начала "с конца", а точнее – с узла *N* 11, – сказала Надя. – Для него, очевидно,

$$S\ (11)\ =\ 120\ (\text{км}),\quad B\ (11)\ =\ 12.$$

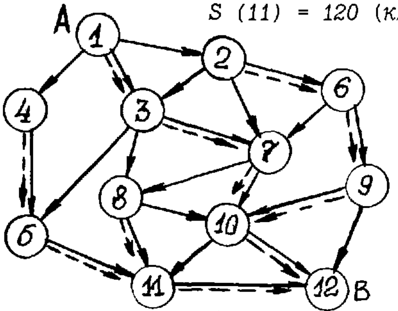

Рис.4

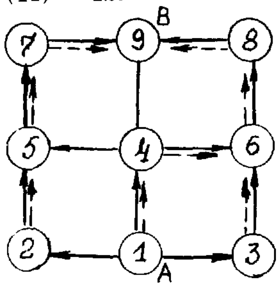

Рис.3

Отмечаю пунктирной стрелкой перегон (*N* 11-*N* 12) (рис.4).

Затем рассмотрю узел *N* 10. От него можно добраться до узла *N* 12 либо "напрямик", по одному лишь перегону (*N* 10 – *N* 12), длина этого пути составит 90 км; либо "в обход", проездом через узел N 11; этот путь составит 100 + 120 = 220 (км), он длиннее. Следовательно, получаю:

$$S\ (10)\ =\ 90\ (\text{км}),\quad B\ (10)\ =\ 12.$$

Перегон (N 10 – N 12) отмечаю пунктирной стрелкой.

Так же буду поступать с узлом *N* 9 и другими узлами.

– Можно я посчитаю дальше? – попросил Витя. – От узла *N* 9 автомобилист может добраться до финиша либо "напрямик", по перегону (*N* 9 – *N* 12), длина этого пути 180 км; либо "в обход", транзитом через узел *N* 10; длина этого пути 170 км. Выходит, что в данном случае "в обход" короче, чем "напрямик". Я вижу, что

$$S\ (9) = 170\ (км), \quad B\ (9) = 10.$$

Перегон (N 9 – N 10) отмечаю пунктирной стрелкой.

Теперь обращусь к узлу N 8. От него можно добраться до финиша одним из двух путей – либо проездом через узел N 10, либо через узел N 11. Длина первого маршрута составит

$$P\ (8;10) + S\ (10) = 120 + 90 = 210\ (км);$$

длина второго –

$$P\ (8;11) + S\ (11) = 80 + 120 = 200\ (км).$$

Второй маршрут короче. Поэтому

$$S\ (8) = 200\ (км), \quad B\ (8) = 11;$$

ставлю пунктирную стрелку на перегоне (N 8 – N 11).

– Я хотела бы сказать об узле N 7, – подняла руку Ира. – От него можно добраться к финишу либо транзитом через узел N 8 – длина этого пути составит

$$P\ (7;8) + S\ (8) = 100 + 200 = 300\ (км);$$

либо через узел N 10 – длина этого пути составит

$$P\ (7;10) + S\ (10) = 200 + 90 = 290\ (км).$$

Получается, что $S(7)=290\ (км)$, $B(7)=10$.

Ставлю стрелку на перегоне N 7 – N 10.

– А выбор маршрута от узла N 6 производится так же просто, – вмешался Андрей. – Имею:

$$P(6;7)+S(7)=60+290=350\ (км);\ P(6;9)+S(9)=100+170=270\ (км).$$

Поэтому

$S(6)=270\ (км)$, $B(6)=9$ (отмечаю стрелкой перегон (N 6 – N 9)).

– Очевидно, сказала Зарифа, – что

$$S\ (5) = P\ (5;11) + S\ (11) = 130 + 120 = 250\ (км);$$

$$S\ (5) = 250\ (км), \quad B\ (5) = 11.$$

Аналогично,

$$S\ (4) = P\ (4;5) + S\ (5) = 150 + 250 = 400\ (км);\ B\ (4) = 5.$$

Найду $S\ (3)$. Это наименьшее из трех таких чисел:

$$P\ (3;5) + S\ (5) = 140 + 250 = 390\ (км),$$

$$P\ (3;7) + S\ (7) = 70 + 290 = 360\ (км),$$

$$P\ (3;8) + S\ (8) = 180 + 200 = 380\ (км).$$

Из этих трех сумм наименьшая – вторая. Поэтому

$$S\ (3) = 360\ (км),\ B\ (3) = 7$$

(ставлю пунктирную стрелку на перегоне (N 3 – N 7).

– Кто бы хотел найти $S\ (2)$ и $S\ (1)$? – спросил учитель.

– $S\ (2)$, – откликнулся Игорь, – это наименьшее из трех вот таких чисел:

$$P\ (2;3) + S\ (3) = 90 + 360 = 450\ (км);$$
$$P\ (2;6) + S\ (6) = 80 + 270 = 350\ (км);$$
$$P\ (2;7) + S\ (7) = 70 + 290 = 360\ (км).$$

Значит, $S\ (2) = 350$, $B\ (2) = 6$.

– Наконец, – заключил Сережа,– остается еще вычислить $S\ (1)$, т.е. минимальный путь для проезда от стартового узла (N 1) до финиша (N 12). Для этого нам нужно сопоставить три числа:

$$P\ (1;2) + S\ (2) = 130 + 350 = 480\ (км);$$
$$P\ (1;3) + S\ (3) = 90 + 360 = 450\ (км);$$
$$P\ (1;4) + S\ (4) = 80 + 400 = 480\ (км).$$

Наименьшее из них – число 450. Поэтому

$$S\ (1) = 450\ (км),\quad B\ (1) = 3.$$

Отправляясь из узла N 1 и перемещаясь по маршруту, намеченному пунктирными стрелками, автомобилист проедет по *кратчайшему* пути:

N 1 – N 3 – N 7 – N 10 – N 12; длина его – 450 км.

– Этим приемом можно воспользоваться для выбора оптимального пути в любой сети дорог с односторонним движением – если только все узлы сети удалось так занумеровать, чтобы разрешенное направление движения по каждому перегону шло от узла с меньшим номером к узлу с бо́льшим номером.

Упражнения для размышления

1. На рисунке 5 схематично изображена сеть дорог, причём на каждом перегоне указана его длина в километрах. Выберите кратчайший маршрут, ведущий из узла А в узел В.

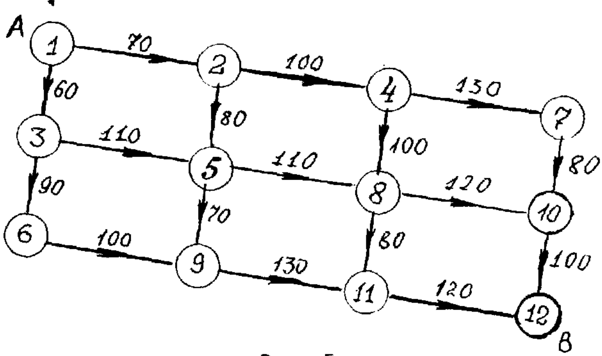

Рис. 5

ЦИКЛ II

НА СТЫКЕ АРИФМЕТИКИ И АЛГЕБРЫ

Встреча 5. Тайны натурального ряда

Самое прекрасное и глубокое переживание, выпадающее на долю человека, - это ощущение таинствености.

А. Эйнштейн.

- Мы начинаем счет: 1,2,3,... - и вступаем в мир натуральных чисел, именуемый "Натуральный Ряд". Мы начинаем счет и первым встречаем самого маленького обитателя этого мира: единицу. Вообразим себе прямую линию, проведенную от нас до самой далекой планеты - до Плутона. Вообразим, далее, что через каждый метр вдоль этого прямолинейного пути установлены фонарики: на расстоянии метра от нас - фонарик, дадим ему имя - номер: 1; еще через метр - другой фонарик, ему дадим следующий номер: 2; еще через метр - снова фонарик, ему присвоим дальнейший номер: 3; и так далее. Хватит ли номеров для в с е х фонариков? Можно гарантировать: хватит, ни один фонарик не будет обойден. Да еще номера останутся. Самые большие номера, которые потребуются для фонариков вблизи Плутона, будут выражаться числом, составленным всего-навсего из 13 цифр...

Пойдем мысленно по той же прямой дальше, за планету Плутон, метр за метром, и вообразим себе, что и дальше будем через каждый метр зажигать фонарик, а каждому фонарику будем выдавать номер. На расстоянии, равном расстоянию от Земли до звезды Про́ксима (эта звезда - ближайшая к нашей Солнечной системе), фонарик будет иметь уже номер, составленный из 17 цифр. А номер фонарика где-то в области туманности Андромеды окажется уже 23-значным.

3 Заказ № 1006

Но для Натурального Ряда это немного: ведь в нем обитают еще числа стозначные, тысячезначные и многие другие - **Натуральный Ряд бесконечен.**

Разнообразны по своему характеру и норову обитатели Натурального Ряда: здесь можно встретить и своенравные Простые числа, которые ни на какое натуральное число делиться не согласны - разве что на себя и на единицу; и симпатичные Точные Квадраты, которые, оказывается, могут быть получены умножением каких-то натуральных чисел на самое себя; и Точные Кубы; и Совершенные Числа, каждое из которых равно сумме всех его делителей, исключая самое себя (например, 6 (=1+2+3), 28 (=1+2+4+7+14)), и многие другие категории чисел.

Натуральным Рядом управляют какие-то таинственные законы и закономерности. Но как их обнаружить? Ведь обитателей в Натуральном Ряду *бесконечно много!* Разве до каждого из них доберешься?

И тем не менее, многие тайны Натурального Ряда математиками разгаданы. Например, еще Эвклид обнаружил, что хотя простые числа в Натуральном Ряду встречаются чем дальше, тем реже, - их, однако, *бесконечно много*. Тщательно скрываемые Натуральным Рядом закономерности выявили выдающиеся математики: Диофант, П.Ферма, Л.Эйлер,К. Ф.Гаусс, П.Л.Чебышев, Д.Гильберт, С.Рамануджан, И.М.Виноградов и другие.

С помощью известных всем нам сведений из школьного курса алгебры мы с вами тоже сумеем во многих случаях выяснить, что возможно и что невозможно в Натуральном Ряду.

Задача 1. *Вы легко приведёте пример точного квадрата, который* (в десятичной записи) *оканчивается цифрой* 6 (например, $256=16^2$). *Но найдется ли в бесконечном Натуральном Ряду хотя бы один точный квадрат, оканчиеающийся* (в десятичной записи) *двумя шестерками?*

- Пусть число N, - начал рассуждать Вадим, - является точным квадратом: $N = n^2$, где n - некоторое натуральное число. Каким должно быть число n, чтобы число N оканчивалось шестеркой? Очевидно, что n обязано оканчиваться либо цифрой 6, либо цифрой 4. Обозначу **предпоследнюю** цифру числа n буквой x. Мыслимы два случая: 1) $n = 100y + 10x + 6$; 2) $n = 100y + 10x + 4$; здесь y - какое-то целое число, $y \geq 0$. В силу условия задачи в каждом из этих случаев число $N - 66$ должно делиться на 100.

В случае 1 имеем:

$$N - 66 = n^2 - 66 = (100y + 10x)^2 + 2(100y + 10x)\cdot 6 - 30 =$$
$$= 100 \cdot [(10y + x)^2 + 12y] + 30\,(4x - 1).$$

Это число делится на 100 только тогда, когда $30\ (4x - 1)$ делится на 100, т.е. $3(4x - 1)$ делится на 10. А это *невозможно*, так как $3\ (4x - 1)$, как произведение двух нечетных чисел, *нечетно*. Итак, в случае 1 число N не может оканчиваться двумя шестерками.

– А теперь, Витя, – сказал учитель, – рассмотри случай 2.

Витя сначала опешил от неожиданности, а потом сказал:

– В случае 2 имеем:

$$N - 66 = n^2 - 66 = (100y + 10x)^2 + 2(100y + 10x)\cdot 4 - 50 =$$
$$= 100 \cdot [(10y + x)^2 + 8y] + 10\,(8x - 5).$$

Поэтому $N - 66$ делится на 100 лишь при условии, что $(8x - 5)$ делится на 10. А это невозможно, так как $(8x - 5)$ – *нечетное* число. Вижу, что ни в коем случае число N, являющееся точным квадратом, не может оканчиваться двумя шестерками.

З а д а ч а 2. *Пусть каждый из вас возьмет два натуральных числа – какие хотите. Составьте их сумму, разность и произведение. Я гарантирую, что из полученных трех чисел по крайней мере одно разделится на 3. Проверьте это на примере. Докажите, что для Натурального Ряда это – закон.*

Первый пример предложила Лена:

– Пусть $x = 47$, $y = 29$. Тогда $x + y = 76$, $x - y = 18$, разность делится на 3.

– А вот если $x = 13$, $y = 11$, – сказал Гена, – то $(x + y)$ разделится на 3; если $x = 13$, $y = 15$, то $x\cdot y$ делится на 3.

Тут уверенно заговорил Андрей:

–Это ясно и в общем случае. Какие возможны случаи при делении двух натуральных чисел x и y на 3? Только вот такие:

I. Хотя бы одно из них делится нацело на 3.

II. Ни одно из них не делится на 3 нацело, и оба при делении на 3 дают *один и тот же* остаток (либо оба дают остаток 1, либо оба – остаток 2).

III. Ни одно из данных чисел не делится без остатка на 3, но они дают при делении на 3 разные остатки (одно – остаток 1, а другое – остаток 2).

В случае I разделится на 3 произведение данных чисел, в случае II – их разность, а в случае III – их сумма.

– Это почему же в третьем случае, – не уловила Лена, – сумма разделится на 3?

– Если x и y, – разъяснил ей Андрей, – при делении на 3 дают остатки соответственно 1 и 2, то это значит, что

$x - 3k + 1$, $y = 3n + 2$, где k и n – целые числа.

Но тогда $x + y = 3k + 3n + 3 = 3(k+n+1)$,
откуда видно, что $x + y$ делится на 3.

З а д а ч а 3. *Пусть каждый из вас выберет какое-нибудь натуральное число. (Скажем, вы выбрали 17). Возведите его в пятую степень. Можете это сделать с помощью микрокалькулятора. Сопоставьте последнюю цифру выбранного вами числа с последней цифрой его пятой степени. Они совпадают! Можно ли гарантировать что такая картина будет иметь место при* ***любом*** *выборе числа?*

– Я бы стала рассуждать так, – приступила к решению Ира, – В каком случае будет число n и число n^5 оканчиваться одной и той же цифрой? Очевидно, только тогда, когда разность $n^5 - n$ делится на 10. Но

$$n^5 - n = n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1) \cdot (n^2 + 1). \qquad (1)$$

В это произведение входят два *последовательных* натуральных числа: $n-1$ и n. Одно из них обязательно **четно.** Значит, $n^5 - n$ делится на 2. Выясню, делится ли $n^5 - n$ еще и на 5. Какие мыслимы случаи? Такие:

I. n делится на 5, т.е. n имеет вид $5k$, где k целое число. Тогда, очевидно, и $n^5 - n$ делится на 5.

II. $n = 5k + 1$. Тогда $n - 1$ делится на 5, и $n^5 - n$ делится на 5.

III. $n = 5k - 1$. Тогда $n + 1$ делится на 5, и $n^5 - n$ делится на 5.

IY. $n = 5k \pm 2$. Тогда $n^2 + 1 = 25k^2 \pm 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 \pm 4k+1)$.

Вижу, что $n^2 + 1$ делится на 5; следовательно, в силу тождества (1), $n^5 - n$ делится на 5.

Итак, во **всех** возможных случаях $n^5 - n$ делится на 5.
А так как $n^5 - n$ еще и четно, то $n^5 - n$ делится на 10.

Вывод : да, *пятая степень* ***любого*** *натурального числа и само это число всегда оканчиваются одной и той же цифрой.*

З а д а ч а 4. *Сколько существует в натуральном ряду таких простых чисел p и q, которые удовлетворяют равенству*

$$2p^2 + 1 = q^2 \quad ?$$

– Одну пару таких чисел легко подметить, – сказал Гена. – Это $p = 2$, $q = 3$. А есть ли еще хотя бы одна такая пара – не ясно...

И даже непонятно, как такую пару искать.

- Может быть, нам поэкспериментировать, - предложил Сережа, - посмотреть частные случаи?

- Давайте сделаем это! - ухватилась за такую мысль Лена.

- Вот какая табличка получится, - продолжал Сережа:-

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	...
$2p^2+1$	9	19	51	99	243	339	579	723	1059	...

Что характерно для полученных (во второй строчке) чисел? Все они делятся на 3 - за исключением числа 19. Может быть, вообще: *при любом простом p, не равном 3, число $2p^2+1$ разделится на 3?* Проверю это еще на одном частном случае, взятом наугад, - например, при $p = 47$. Тогда $p^2 = 2209$, $2p^2 + 1 = 4419$, а это число, очевидно, делится на 3 (так как сумма его цифр делится на 3). Да, мне кажется правдоподобным, что

при любом p, не равном 3, число $2p^2+1$ делится на 3.

Но, разумеется, эту гипотезу еще надо доказать.

- Допустим, что ты это докажешь. Чем же это облегчит тебе решение нашей задачи? - недоумевала Лена.

- Дальше все было бы просто. Если при $p\neq3$ число $2p^2+1$ делится на 3, а $q^2=2p^2+1$, то и q^2 разделится на 3; следовательно, и q делится на 3, $q = 3n$ (n - целое число). А среди чисел такого вида *только одно - простое: $q=3$.*

- Очень симпатично! - воскликнула Лена. - Можно, Георгий Данилович, я изложу компактно решение задачи?

Учитель кивнул, и Лена пошла к доске.

- Р е ш е н и е з а д а ч и 4. Сначала докажу:

если p -простое число *и* $p\neq3$, *то* $2p^2+1$ делится на 3.

Действительно, из условия этого утверждения следует, что число p не может иметь вида $p=3k$. Поэтому p имеет вид $3k+1$ или $3k-1$, где k - некоторое целое число. Но тогда

$$2p^2+1=2(3k\pm1)^2+1=18k^2\pm12k+3,$$

так что $2p^2+1$ делится на 3.

После этого возвращаюсь к исходной задаче.

Пусть p и q - *простые* числа такие, что $2p^2+1=q^2$.

Если $p=3$, то $2p^2+1=19$; но ни при каком целом q невозможно равенство $19 = q^2$. Значит, случай $p=3$ отпадает. Если же $p\neq3$, но p - простое число, то $2p^2+1$ (как я только что доказала) делится на 3. И, следовательно, q^2 делится на 3. Но тогда и число q делится на 3. А так как число q - по условию - *простое*, то $q=3$. Но тогда $2p^2+1=9$, откуда $p=2$.

Итак, *задача имеет единстеенное решение:* $p=2$, $q=3$.

* - Прежде чем мы с вами обсудим следующую задачу, - сказал Георгий Данилович, - я хочу поговорить с вами о **египетском треугольнике.**

Для строителя важно уметь отметить на ровной горизонтальной площадке прямой угол. И вот, еще четыре тысячелетия тому назад строители - умельцы древних стран (в частности, Египта) подметили простой и удобный способ, как это сделать. Его можно сформулировать в виде такого правила: "Возьми веревку любой длины, сделай узел в ее начале, а затем через равные расстояния завяжи на ней еще 12 узлов; последний узел скрепи с первым (рис.1). К каждому узлу прикрепи небольшое колечко. Пронумеруй узлы последовательно но-мерами от 1 до 12. Закрепи веревку колышком в узле N 1; взявшись за узел N4, натяни веревку и затем закрепи этот узел колышком; наконец, взявшись за узел N 8, снова натяни веревку. Веревка вытянется в виде треугольника (рис.2). Гарантирую тебе, что в этом треугольнике есть прямой угол, а именно: тот, который оказался у узла N4"

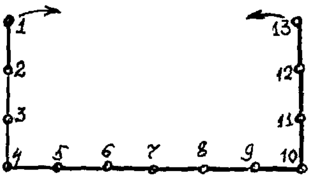

Рис.1

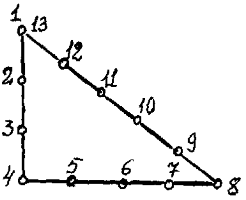

Рис.2

Такой прием передавался из поколения в поколение, им часто пользовались и им восхищались. Древнеримский архитектор Витрувий, живший лет через 300 после Эвклида, считал это правило наиболее ценным для практики фактом геометрии.

Треугольник со сторонами в 3, 4 и 5 единиц получил название "египетского треугольника"; тройку чисел (3;4;5) называют "египетской тройкой".

В шестом веке до нашей эры греческий мыслитель Пифагор, путешествуя по Египту, обратил внимание на этот способ построения прямого угла, которым пользовались египетские строители. О биографии Пифагора известно сейчас очень мало, но мы можем с большой степенью правдоподобия восстановить ход размышлений этого любознательного человека.

Пифагора, прежде всего, заинтересовало: *нет ли других троек натуральных чисел a, b, c, которые позволили бы сходным образом получить прямой угол?* Почему именно (3; 4; 5)? А, скажем, тройка (5;6;7) не подойдет? Или (3; 8;10)? В чем особенность этой тройки (3; 4; 5), которая обеспечивает наличие у египетского треугольника прямого угла? Какова особенность троек (5; 6; 7) и (3; 8; 10), которая гарантирует, что в треугольнике со сторонами длиною 5, 6, 7 единиц и в треугольнике со сторонами 3,8,10 единиц не может быть прямого угла?

Пифагор любил выяснять зависимости между числами, и он обратил внимание на особенность египетской тройки: $3^2+4^2=5^2$ - сумма квадратов двух меньших из этих чисел равна квадрату большего. Тройки (5; 6; 7) и (3; 8; 10) этим свойством уже не обладают: $5^2+6^2 > 7^2$, $3^2+8^2 < 10^2$.

Такие примеры привели Пифагора к догадке, что, пользуясь подобными тройками чисел (вроде (5,6,7) или (3,8,10)), невозможно получить веревочный треугольник с прямым углом:

- *Никакой треугольник,* - утверждал Пифагор, - *у которого длины a, b, c его сторон ($a < b < c$) не связаны зависимостью*

$$a^2+b^2=c^2,$$

не может иметь прямого угла (причем это верно даже если a, b, c - не обязательно целые числа, а любые положительные числа).

Последнее утверждение и есть знаменитая т е о р е м а П и ф а г о р а, с которой вы знакомитесь в школьном курсе геометрии (обычно в другой ,но равносильной, формулировке).

Таким образом, *прямые углы могут оказаться лишь у таких треугольников, для которых $a^2 + b^2 = c^2$.*

Но Пифагор знал и более точный факт - он знал, что здесь не бывает исключений:

Каждый (без исключения!) треугольник, у которого длины (a, b, c) сторон связаны зависимостью $a^2 + b^2 = c^2$, обязательно имеет прямой угол (и притом, - при *любых положительных* значениях a, b, c - а не только *натуральных*).

Пифагора, который увлекался свойствами натуральных чисел, интересовали прямоугольные треугольники, у которых длины a, b, c сторон выражаются именно *натуральными* числами (как в случае египетского треугольника). Каждый такой треугольник короче называют ц е л о ч и с л е н н ы м прямоугольным треугольником, а каждую тройку чисел (a, b, c), удовлетворяющих условию $a^2+b^2=c^2$, принято называть **"пифагоровой тройкой"**.

Итак, треугольник, длины сторон которого образуют "пифагорову тройку", обязательно должен иметь прямой угол. Один такой треугольник Пифагор уже знал - это египетский треугольник. А есть ли еще другие "пифагоровы тройки"? Вероятно, Пифагор путем простого перебора обнаружил еще какую-нибудь "пифагорову тройку" - например, (5; 12; 13) (здесь $5^2+12^2=13^2$) или (9;12;15) ($9^2+12^2=15^2$). Каждая такая тройка давала Пифагору новый способ построения на местности прямого угла с помощью веревки, похожий на способ египетских строителей. Например, из рисунка 3 ясен такой способ, связанный с тройкой (5; 12; 13).

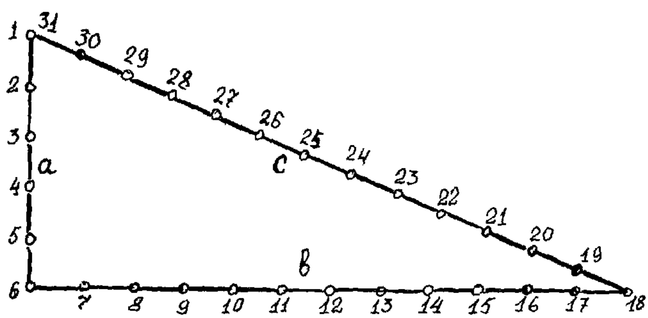

Рис.3

"Пифагоровы тройки" надолго привлекли к себе внимание любителей чисел. Сколько же имеется различных "пифагоровых троек"? Как их найти? Оказывается, их бесконечно много!

Пифагор предложил общий прием для получения целочисленных прямоугольных треугольников. Возьмите два произвольных последовательных натуральных числа (например, 4 и 5), найдите их сумму (в нашем примере это будет 9) и удвоенное произведение (в нашем примере 40). *В прямоугольном треугольнике с такими катетами длина гипотенузы тоже будет выражаться целым числом.* В нашем примере: $a = 9$, $b=40$, $c^2 = a^2 + b^2 = 9^2+ 40^2 = 1681$, $c = 41$. В общем случае данный способ образования "пифагоровых троек" можно выразить так: если n - произвольное натуральное число, $a = n+(n+1)$, (т.е. $a = 2n+1$), $b = 2n(n+1)$, $c = 2n(n+1) + 1$, то $a^2+b^2=c^2$. Проведите сами доказательство этого тождества.

Через много лет после Пифагора был найден еще такой - более общий - способ образования "пифагоровых троек". А именно, вы можете найти сколько угодно "пифагоровых троек", если будете искать числа a, b, c по таким формулам:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2+n^2, \qquad (1)$$

где m и n - любые натуральные числа, причем $m > n$.

В самом деле, при любых m и n

$$a^2+b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2 = c^2.$$

Но даже такая богатая серия троек чисел, которая получается по формулам (1), **не содержит всех** "пифагоровых троек"! Например, можно показать, что ни при каких m и n вы по формулам (1) не получите тройку чисел (9; 12; 15) - а ведь это тоже "пифагорова тройка". Известны и такие более общие формулы, чем формулы (1), которые охватывают уже все без исключения "пифагоровы тройки"; но я их сейчас приводить не буду. Вместо этого я хочу обсудить с вами одно, связанное с "пифагоровыми тройками", странное явление в Натуральном Ряду.

Давайте запишем несколько "пифагоровых троек" (табл.1).

Таблица 1

a	b	c
3	4	5
8	6	10
5	12	13
7	24	25
9	12	15
35	84	91
21	20	29
33	56	65

Первая из них -"египетская тройка". Обратите внимание на то, что в ней есть число, **равное 3**. Посмотрите на остальные записанные вами тройки; обладают ли они похожим свойством?

- Да, - сказала Надя, - в каждой из них найдется число (хотя бы одно), которое д е л и т с я нацело на 3.

- В египетской тройке, - продолжил Георгий Данилович,- имеется число, **равное 5**; а есть ли что-нибудь похожее в других пифагоровых тройках?

- Да, - откликнулся Витя, - в каждой имеется хотя бы одно число, к р а т н о е пяти.

- А что вы скажете про число 4?

- И с числом 4 обстоит так же, - ответила Лена, - в египетской тройке оно есть, а в каждой из остальных пифагоровых троек есть число, которое на 4 **делится.**

- Так что же это, - спросил Георгий Данилович, - случайное совпадение, имеющее место лишь для нескольких выписанных нами пифагоровых троек, или же **все на свете пифагоровы тройки** (получаемые по формулам (1) или каким угодно другим путем) **обладают этими свойствами?** Итак, формулирую задачу:

З а д а ч а 5. *Верно ли такое утверждение: Какой бы ты ни выбрал прямоугольный треугольник, у которого длины всех сторон (a, b, c) выражаются целыми числами, обязательно одно из этих чисел разделится на 3, одно (другое или то же самое) - на 4, и одно* - на *5?*

- Да, заманчивое предположение, - усмехнулся Игорь, - только вряд ли оно верно для **всех** пифагоровых троек.

- Давайте посмотрим еще на каком-нибудь примере, выполняется ли эта гипотеза, - предложил Толя. - Если подтверждение не получится, то прав Игорь: гипотеза в такой общей формулировке не верна.

- Давай, Игорь, подбери примерчик поядовитее! - подзадорила своего одноклассника Надя.

- Испытаем хотя бы вот такой пример, - отозвался Игорь. - Беру $m=50$, $n=3$, и тогда по формулам (1) нахожу:

$$a=2491,\quad b=300,\ c=2509,\quad 2491^2 + 300^2 = 2509^2$$

Есть ли в этой тройке число, которое делится на 3? Да, это число 300. А число, которое разделится на 4? Да, то же самое число 300. А на 5? На 5 тоже делится число 300. Получается, что в этом случае гипотеза подтверждается.

- А мы с Геной, - сказал Витя, - рассмотрели тем временем два других примера, и гипотеза тоже подтвердилась. Пора попытаться ее доказать!

- Начни, Витя, - предложил учитель.

- Пусть,- стал рассуждать Витя,- a, b, c - какие-либо натуральные числа, связанные равенством

$$a^2+b^2=c^2.$$

Докажу, что хотя бы одно из них делится на 3. Если a или b делится на 3, то всё в порядке. Если же ни a ни b на 3 не делится, то

$a = 3k \pm 1$, $b = 3p \pm 1$ (k и p - какие-то целые числа).

$a^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3K + 1$, где K - некоторое целое число.

Аналогично

$$b^2 = 3P + 1 \text{, где } P \text{ - целое число.}$$

Тем самым мы установили:

квадрат натурального числа либо делится на 3 нацело, либо при делении на 3 даёт остаток 1 - но никогда при делении на 3 не может дать остатка 2.

Из полученных формул следует такой вывод для числа c, выражающего длину гипотенузы рассматриваемого прямоугольного треугольника:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3\ (K + P) + 2.$$

Вижу, что в этом случае (то есть, когда ни a, ни b не делится на 3) число c^2 при делении на 3 дает остаток 2. Но такое, как мы только что видели, невозможно ни для какого квадрата натурального числа. Значит, случай, когда ни a, ни b не делится на 3, невозможен. Итак, **среди чисел пифагоровой тройки (a, b, c) хотя бы одно обязано разделиться на 3.**

- А как выяснить, делится ли хотя бы одно из чисел (a, b, c) на 5? - спросил Георгий Данилович.

- Я бы, - отозвалась Зарифа, - начала примерно так же, как Витя. Если a или b делится на 5, то всё в порядке. Если же нет, то я бы выяснила, какие могут быть остатки от деления точного квадрата - скажем, a^2 - на 5. Возможны варианты:

I. $a = 5k \pm 1$, тогда $a^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$, то есть

$a^2 = 5K + 1$ (здесь K - некоторое целое число);

II. $a = 5k \pm 2$, $a^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$, то есть

$a^2 = 5K + 4$ (здесь K - целое число).

Вижу, что если некоторое натуральное число (a) не делится на 5, то его квадрат даст при делении на 5 либо остаток 1, либо остаток 4 (но *не может дать остатка 2 или 3*).

Аналогично обстоит дело с числом b^2: если b не делится на 5, то либо

$$b^2 = 5P + 1,$$

$$\text{либо } b^2 = 5P + 4,$$

где P - целое число.

Но $c^2 = a^2 + b^2$. Поэтому для c^2 должен иметь место один из следующих вариантов:

либо $c^2 = 5\ (K + P) + 2$,

либо $c^2 = 5\ (K + P + 1) + 3$,

либо $c^2 = 5\ (K + P + 1)$.

Но c^2 - квадрат некоторого натурального числа ; а точный квадрат, как мы уже видели, не может при делении на 5 дать остаток 2 или 3. Следовательно, из этих трёх вариантов первый и второй отпадают, остается лишь третий вариант, т.е. c^2 делится без остатка на 5. Но тогда и число c обязано разделиться без остатка на 5. **Итак, из трех чисел пифагоровой тройки a, b, c хотя бы одно обязано разделиться на 5.**

- Остается проверить, - сказала Ира, - что **хотя бы одно из чисел a, b, c делится на 4. Я бы стала так рассуждать. **Допущу**, что **ни одно из чисел a и b не делится на 4.** Тогда
либо $a=4k\pm1$, либо $a=4k+2$ (здесь k - некоторое целое число).
В первом случае $a^2=16k^2\pm8k+1$, то есть

$$a^2=8K+1,\text{ где } K \text{ - какое-то целое число.}$$

Во втором случае $a^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 16k(k+1) + 4$. Но число $k(k+1)$ - четное, то есть $k(k+1)=2K$, где K - некоторое натуральное число. Следовательно, a^2 имеет вид

$$a^2 = 32K + 4 \quad (K \text{ - некоторое целое число}).$$

Вижу, что *квадрат натурального числа, не делящегося на 4, либо дает при делении на 8 остаток 1, либо при делении на 32 остаток 4.* Поэтому могу еще написать:

$$b^2=8P+1 \text{ или } b^2=32P+4 \quad (\text{здесь } P \text{ - некоторое целое число}).$$

Так как $c^2 = a^2+b^2$, то могут представиться четыре варианта:

$$c^2=8(K+P)+2;\quad c^2=8(K+4P)+5;\quad c^2=8(P+4K)+5;\quad c^2=32(K+P)+8.$$

Но число c^2 - точный квадрат; поэтому c^2 обязано (как мы только что видели) либо при делении на 8 дать остаток 1, либо при делении на 32 дать остаток 4 (см. выше рассуждения относительно a^2). Ничего подобного не имеет места ни в одном из рассматриваемых четырех вариантов. Следовательно, я пришла к противоречию. Значит, мое допущение не верно.
Итак, *хотя бы одно из чисел a, b пифагоровой тройки (a, b, c) делится на 4 без остатка.*

- Выходит, что наша гипотеза подтвердилась, - заключила Лена:
- из трех чисел любой пифагоровой тройки хотя бы одно делится на 3, одно - на 4, одно - на 5.

- Мы, - заметил Саша, - даже доказали больше: ***в целочисленном прямоугольном треугольнике длина хотя бы одного из катетов (a или b) делится на 3, и длина хотя бы одного из катетов делится на 4.***

Упражнения для размышления

1. В одной хорошей книге солидного математика утверждается, что справедливо следующее равенство:

$$27^5 + 85^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5. \qquad (*)$$

Не производя никаких записей, выясните: верно ли это равенство?

2. Правду ли говорят, что в Натуральном Ряду имеет место такой закон: "Как ни выбирай два нечетных точных квадрата, никогда их сумма не составит точного квадрата"? Сначала проверьте это на примере. Затем докажите (или опровергните) это в общем случае.

3. Возьмите число 5. Оно равно сумме двух точных квадратов. Каких? Верно, $5 = 2^2 + 1^2$. Возведите его в квадрат, вы получите 25; оно ведь тоже представимо в виде суммы двух точных квадратов, не так ли? (Да, $25 = 4^2 + 3^2$). Возведем и 25 в квадрат, получим 625. Знаете, оно тоже представимо в виде суммы двух точных квадратов. Воспользуйтесь таблицей квадратов чисел от 1 до 25, и вы это обнаружите. А именно: $625 = 23^2 + 14^2$. Может быть, это для Натурального Ряда закон: "**Если какое-то натуральное число является суммой двух точных квадратов, то квадрат этого числа тоже является суммой двух точных квадратов"?** Выясните это!

4. Верен ли в Натуральном Ряду такой закон: "Если четное число является суммой двух точных квадратов, то и его половина окажется суммой двух точных квадратов"?

5. Однажды сложили три каких-то целых числа, и оказалось, что сумма разделилась без остатка на 6. А сумма кубов этих же чисел обязана ли разделиться нацело на 6?

6. Для каждого номера n рассмотрим сумму его четвертой , второй и нулевой степеней, т.е. число $U_n = 1 + n^2 + n^4$. При $n=1$ оно является,очевидно,простым. Есть ли еще какой-либо другой номер n, для которого число U_n тоже окажется простым?

7. Однажды один школьник выбрал два точных квадрата (x и y) и сложил их. Оказалось, что сумма ($x+y$) разделилась на 3 без остатка. Можно ли утверждать, что **каждое** слагаемое (т.е. и x, и y) тоже обязано разделится нацело на 3?

****8**. Дан правильный треугольник. а) Предложите способ, позволяющий при любом натуральном n разбить треугольник на n^2 правильных треугольников. б) Предложите способ, позволяющий перекроить один правильный треугольник в два правильных треугольника. в) Предложите бесконечную серию таких способов.

Встреча 6. Определенные решения неопределенных уравнениий

Пролог

З а д а ч а 1. *Транспортная контора получила заявку на перевозку серийных комплектов оборудования от завода к различным заказчикам. Каждый комплект весит 47 тонн и упакован в небольших, удобных для перевозки, ящиках. Контора располагает грузовыми автомобилями двух видов: грузоподъемностью в 5,5 и 3,5 тонн. Диспетчеру поручено выделить для этих перевозок необходимое количество автомашин, но при условии их полной загрузки.*

Вообразите, что вы - диспетчер. Сколько грузовых машин каждого вида вы бы выделили на рейс по перевозке одного комплекта оборудования?

- Решая задачу с помощью алгебры, мы часто ее сводим к решению некоторого *уравнения* или *системы уравнений*. При этом стремимся составить по условиям задачи столько (независимых) уравнений, сколько имеется неизвестных.

Но бывают и такие задачи, для которых это сделать невозможно: число независимых уравнений, которые можно составить по условию задачи, меньше числа неизвестных; например, может оказаться, что по условию задачи мы можем составить только одно уравнение, хотя неизвестных два. Однако может случиться, что условие задачи накладывает какие-то другие, дополнительные ограничения на неизвестные, которые вместе с полученными уравнениями позволяют полностью найти значения неизвестных; например, из условия может быть ясно, что искомые числа - целые, или натуральные, или заключенные в заданных пределах и т.п. Приведу один очень простой п р и м е р. *Пусть требуется найти двузначное число, у которого сумма цифр равна 1.*

Если x - число его десятков, а y - число единиц, то получаем только одно уравнение для этих двух неизвестных:

$$x + y = 1, \qquad (1)$$

и существуют бесконечно много *действительных* чисел, удовлетворяющих этому условию. Но по смыслу задачи

x и y – *целые* числа, причем $x > 1$, $y > 0$. (2)

Уравнение (1) и дополнительные условия (2) уже позволяют **однозначно** найти неизвестные. Действительно, если бы мы имели $x>1$, то было бы $x + y > 1$, что противоречит условию (1). Следовательно, x не больше, чем 1. И в то же время $x > 1$. Значит, $x=1$. А тогда $y=0$. Таким образом, хотя для *двух* неизвестных мы имели только *одно* уравнение, мы – благодаря дополнительным условиям – сумели *однозначно* определить искомые неизвестные.

Уравнение, которое содержит больше, чем одно, неизвестное, называется неопределенным. Аналогично, система уравнений, в которой неизвестных больше, чем независимых уравнений, называется неопределенной.

При этом, разумеется, каждый раз должно быть указано то множество чисел, к которому обязаны принадлежать неизвестные. Чаще всего требуется, чтобы неизвестные были *целыми* числами или *натуральными* числами. Тогда говорят, что ищется решение (неопределенного уравнения или неопределенной системы уравнений) в *целых* числах (или – соответственно – в *натуральных* числах).

– Рассмотрим теперь, – сказал Георгий Данилович, – несколько задач, которые приводят к неопределенным уравнениям.

Задача 2. *В этом вот заклеенном конверте находится листок; на нем я записал одно трехзначное число, все три его цифры различные, и ни одна не равна нулю. Из цифр этого числа я составил всевозможные двузначные числа (но так, чтобы в каждом числе цифры были различными), а затем эти числа сложил; оказалось, что полученная сумма вдвое больше исходного трехзначного числа. Какое число записано на листке в этом конверте?*

– Я бы, – предложила Ира, – перевела задачу на язык алгебры. Пусть $\overline{xyz}$ – записанное число. Здесь

$$1 < x < 9; \ 1 < y < 9; \ 1 < z < 9.$$

Сумма, о которой говорится в задаче, равна

$$\overline{xy} + \overline{yx} + \overline{xz} + \overline{zx} + \overline{yz} + \overline{zy} =$$

$$= (10x+y)+(10y+x)+(10x+z)+(10z+x)+(10y+z)+(10z+y) = 22(x+y+z).$$

Но вы, Георгий Данилович, утверждаете, что эта сумма вдвое больше самого записанного числа, т.е.

$$22\,(x+y+z) = 2(100x+10y+z), \text{ или}$$

$$89x=10z+y. \qquad (3)$$

Таким образом, условие задачи дает для *трех* неизвестных лишь **одно** уравнение. Это - *неопределенное* уравнение, ему удовлетворяют бесконечно много троек действительных чисел (x, y, z). Но ведь нас в данной задаче интересуют не любые действительные числа, а только *натуральные*, притом - *заключенные между 1 и 9*. Это соображение меняет дело. Вижу, что в правой части равенства (3) записано **двузначное** число (у него z десятков, y единиц). Поэтому в левой части натуральное число x обязано быть равным 1. Но тогда равенство (3) принимает вид

$$89 = \overline{zy}.$$

Отсюда ясно, что $z=8, y=9$. Следовательно, тот, кто вскроет конверт, прочтет на листочке число 198.

Вскрыв конверт, ребята убедились, что Ира права.

- К наиболее простым неопределенным уравнениям,- сказал Георгий Данилович,- относятся уравнения вида

$ax + by = c$ (a, b, c - постоянные целые числа).

Рассмотрим несколько задач, связанных с такими уравнениями.

Задача 3. *Можете ли вы найти какое-либо целочисленное решение уравнения*

$$9x - 12y = 17?$$

- Здесь и искать не нужно - дело безнадежное, - ответил Андрей. - Если бы нашлась такая пара целых чисел x_0, y_0, что $9x_0 - 12y_0 = 17$, то мы имели бы, что $17 = 3\,(3x_0 - 4y_0)$, т.е. оказалось бы, что 17 делится нацело на 3. А это неверно. Значит, данное уравнение *ни одного* решения в целых числах не имеет.

Задача 4. *А сколько решений имеет в целых числах уравнение $17x - 9y = 12$?*

- Я бы, - отозвался Витя, - сначала стал искать **хотя бы одно** решение. Раз $17x - 9y = 12$, то $9y = 17x - 12$,

$$y = (17x - 12)/9 = 2x - 1 - (x+3)/9.$$

Вижу, что число y будет целым, когда число $(x+3)/9$ будет целым. Например, когда $x = -3$. Но тогда $y = -7$. Выходит, что пара чисел $(-3, -7)$ - решение нашего уравнения. В самом деле,

$$17(-3) - 9(-7) = 12.$$

- А есть ли у нашего уравнения еще и другие решения? - спросила Лена.

- Ну, конечно, - ответил Витя. - Ведь в моем рассуждении вовсе не обязательно, чтобы $(x+3)/9$ было равно нулю - достаточно, чтобы оно оказалось *каким угодно* **целым** *числом*. Обозначу это целое число одной буквой, например, U. Тогда

$$(x+3)/9 = U,\quad x = 9U - 3,\quad y = 2x - 1 - U,\ \text{т.е.}\ y = 17U - 7.$$

Здесь U может быть **любым** целым числом, так что решений - бесконечно много. Например, при $U=1$ найдем еще одно решение: $x=6$, $y=10$. Действительно, $17\cdot 6 - 9\cdot 10 = 12$.

З а д а ч а 5. *Предлагаю решить в целых числах уравнение*

$$5x + 8y = 7. \qquad (4)$$

- Одно его частное решение я вижу, - сказал Гена: - $x = 3$, $y = -1$. В самом деле:

$$5\cdot 3 + 8\cdot(-1) = 7. \qquad (5)$$

А как найти другие? Не ясно...

- Из равенств (4) и (5), - заметил учитель, - следует, что для любого целочисленного решения (x, y) уравнения (4) имеем:

$$5\ (x-3) + 8\ (y+1) = 0. \qquad (6)$$

Попытаемся дальше рассуждать, исходя из этого равенства.

- Разрешите, я попробую, - отозвался Толя. - Из равенства (6) следует, что

$$8(y+1) = 5(3-x).$$

Значит, левая часть обязана разделиться на 5. А так как числа 8 и 5 - взаимно простые, то $y+1$ обязано разделиться на 5, то есть

$$(y+1)/5 = t, \qquad (7)$$

где t - некоторое целое число. Но тогда

$$(3-x)/8 = t. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$x = 3 - 8t,\quad y = 5t - 1. \qquad (9)$$

Вижу, что если (x, y) - целочисленное решение уравнения (4), то найдется такое целое число t, что x и y можно записать в виде (9). Вероятно, и обратное утверждение верно.

- Все же, проверь, - предложила Лена.

- Проверю. Пусть при некотором целом t числа x и y задаются формулами (7); будут ли они удовлетворять уравнению (4)? Имею:

$$5(3-8t) + 8\ (-1+5t) = 7.$$

Вижу, что удовлетворяют. Значит, когда t пробегает всевозможные целочисленные значения, мы получим по формулам (9) в с е без исключения частные решения уравнения (4). Например, при $t=1$ получаем такое частное решение: $x= -5$, $y= 4$. А при $t=10$ получим другое частное решение: $x= -77$, $y=49$. И таких частных решений - бесконечно много.

- Формулы (9), - сказал учитель,- дающие при всевозможных целых t **все** целочисленные частные решения неопределенного уравнения (4), называют его *общим решением*. На примере задачи 5 мы убедились, что как только мы обнаружили одно частное решение уравнения вида $ax+by=c$, где a и b - взаимно простые целые числа, мы можем без труда найти его общее решение. Ведь рассуждение в нашем конкретном случае носило общий характер, не правда ли?

- Безусловно, - подтвердил Андрей. - Вот как я бы рассуждал в общем случае. Пусть (x_0, y_0) - какое-нибудь конкретное частное целочисленное решение неопределенного уравнения

$$ax+by=c \qquad (10)$$

(здесь и в дальнейшем предполагаю, что a и b - взаимно простые числа). Тогда верно равенство

$$ax_0+by_0=c.$$

Пусть (x,y) - произвольное другое решение уравнения (10). Тогда верно равенство

$$ax+by=c.$$

Из последних двух равенств вытекает, что

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$
$$a(x-x_0) = -b(y-y_0).$$

Вижу, что произведение $a(x-x_0)$ делится на b; а так как a и b взаимно просты, то и $x-x_0$ делится на b: найдется такое целое число t, что $(x-x_0)/b = t$.

Но так как $(y-y_0)/(-a)=(x-x_0)/b$,
то $(y-y_0)/(-a) = t$. Таким образом,

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at. \qquad (11)$$

Итак, для *каждого* решения (x,y) уравнения (10) найдется такое целое число t, что выполняется равенство (11). Обратное тоже верно: при *любом* целочисленном t равенства (11) задают целочисленное решение уравнения (10). В самом деле, в силу формул (11) имею:

$$ax+by=a(x_0+bt) + b(y_0-at) =ax_0+by_0 =c.$$

Значит, формулы (11) дают *общее решение* неопределенного уравнения (10), т.е. при всевозможных целых t можно по формулам (11) получить **все** решения уравнения (10).

- Теперь мы уже вполне подготовлены, чтобы справиться с задачей 1 из Пролога.

- Я бы начала решение так, - сказала Ира. - Пусть для одного рейса я выделю x машин грузоподъемностью 5,5 тонн и y машин грузоподъемностью 3,5 тонн. Тогда - в случае их полной загрузки

- имеет место равенство

$$5,5x + 3,5y = 47.$$

Из этого уравнения я должна найти целые неотрицательные числа x и y. Умножая обе части этого уравнения на 2, получу уравнение

$$11x+7y = 94. \qquad (12)$$

Его и надо решить, пользуясь полученными раньше формулами.

- Но для этого надо, - напомнила Лена, - сначала найти хотя бы одно частное целочисленное решение! А где же оно? - развела она руками.

- Это резонно, - согласился Игорь. - я бы стал искать частное решение так. Из уравнения (12) имею:

$$y=(94-11x)/7=13 -2x +(3+3x)/7.$$

Так как x и y -целые числа, то $(3+3x)/7$ - тоже должно быть целым числом. Например, при $x = -1$ эта дробь равна нулю. Но тогда $y=15$. Итак, одно частное решение уравнения (12) мы знаем: $x_0=-1$, $y_0 =15$.

- А теперь, - продолжила Надя, - можно записать и общее решение уравнения (12):

$$x= -1+7t, \quad y=15 - 11t, \qquad (13)$$

где t пробегает всевозможные целочисленные значения. Но в нашем случае должно быть $x = -1 + 7t \geqslant 0$ и $y = 15 - 11t \geqslant 0$, то есть

$$t \geqslant 1/7 \quad \text{и} \quad t \leqslant 15/11 .$$

Этим двум условиям удовлетворяет только одно целое число: $t=1$. При этом, как видно из формул (13),

$$x = 6, \quad y=4.$$

Итак, если бы я была диспетчером, я бы выделила на перевозку одного комплекта оборудования 6 машин грузоподъемностью 5,5 тонн и 4 машины грузоподъемностью 3,5 тонн.

З а д а ч а 6 (С т а р и н н а я з а д а ч а). "*Позвал к себе купец своего приказчика и спросил его:*

- Почем сегодня на птичьем рынке воробьи?

- По три птички за дукат.

- А снегири?

- По две пташки за дукат.

- А голуби?

- Сегодня за голубя платят по 2 дуката.

- Так вот тебе 30 дукатов, израсходуй все и купи на эти деньги тридцать птиц, но чтобы среди них были и голуби, и воробьи, и снегири.

Через час приказчик вернулся.

- Ну, как, сумел ты выполнить мой заказ? - спросил его купец. Разумеется, сумел!"

А вы сумели бы?

- И мы бы сумели, - уверенно ответил Сережа. - И не за час, а за 10 минут. Я бы рассуждал так. Пусть куплено x воробьев, y снегирей, z голубей. Тогда

$$x+y+z = 30, \qquad (14)$$

$$(1/3)\ x + (1/2)\ y + 2z = 30, \text{ то есть}$$

$$2x+3y+12z=180. \qquad (15)$$

Числа x, y, z - по смыслу задачи - целые, и притом заключенные между 1 и 28. Из двух уравнений (14) и (15) исключу одно из неизвестных, например, x. Получаю

$$y + 10z = 120, \qquad z = 12 - (y/10).$$

Вижу, что z будет целым числом лишь тогда, когда y делится на 10. Так как $1 < y < 28$, то y либо равно 10, либо 20. Но если $y=20$, то $z=10$ и $x=0$, что невозможно (так как требуется, чтобы в покупке были птицы **всех трех** видов). Следовательно, $y=10$. Тогда $z=11$ и, следовательно $x=9$.

Ответ: следует купить 9 воробьев, 10 снегирей и 11 голубей.

Упражнения для размышления

1. В каждой квартире одного строящегося многоквартирного дома имеется комната шириной 3,9 метра. На складе имеются доски двух видов, пригодные для настила полов в этих комнатах: одни доски - шириной 12 см, другие - шириной 19 см. По длине эти доски подходят для этих комнат. Сколько досок каждого вида следует взять для настила пола в одной комнате?

2. Решите в простых числах уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$. (Один способ решения был рассмотрен на Встрече 2; предложите другой способ).

Встреча 7. Прикидка

Пролог

З а д а ч а 1. (На ее решение дается 30 секунд). *Один мальчик, когда он научился считать, так увлекся этим делом, что од-*

нажды заявил маме, когда она позвала его обедать: "Подожди, вот досчитаю до одного миллиона, тогда пойду" (а он к тому времени досчитал уже до 5000). Сколько часов или дней (а, может быть, месяцев) пришлось бы маме ждать, если мальчик на самом деле стал бы считать до миллиона и если бы он в течение этого времени ни на что не отвлекался - даже на еду и сон? Будем полагать, что на то, чтобы назвать одно число, уходят в среднем три секунды.

Дайте ответ не производя никаких письменных вычислений.

- Располагая каким-либо числом, записанным в виде десятичной дроби, мы можем его *округлить* (по обычным правилам, хорошо известным из арифметики), оставив лишь **одну** верную значащую цифру[1]. Например: $328,73 \approx 3 \cdot 10^2$; $4826,7 \approx 5 \cdot 10^3$; $0,0435 \approx 0,04 = 4 \cdot 10^{-2}$.

На практике нередко бывает, что нас удовлетворит, если какой-либо результат будет нам сообщен приближенно, и притом -**лишь с одной верной значащей цифрой**; в то же время существенно, чтобы было правильно указано, единицы какого разряда изображены этой цифрой: единицы, или десятки, или сотни, или десятые, или сотые и т.д.

Так, например, вас, вероятно, устроит, если на Ваш вопрос: "Сколько жителей в Париже?" - вам ответят: "Около 7 миллионов"; или если на вопрос: "Сколько километров от Москвы до Хабаровска?" вы получите ответ: "Около 7 тысяч".

Каждое число можно округлить, чтобы осталось **только одна верная значащая** цифра, и притом **чтобы она была не больше 5** (если первая отличная от нуля цифра числа равна 5 и имеются в числе еще и другие, не равные нулю, цифры, то условимся его округлять по избытку).

Например, $5826,7 \approx 1 \cdot 10^4$; $0,00813 \approx 0,01$; $0,00213 \approx 0,002$.

Если после *такого* округления оказывается, что оставшаяся цифра показывает, сколько в числе, получившемся после округления, *десятков*, то говорят, что исходное число имеет порядок 1; если эта цифра означает *сотни*, то говорят, что порядок числа равен 2, и т.д. Если цифра изображает десятые доли, то говорят, что число имеет порядок (-1), если сотые доли - порядок (-2), и т.д. Нако-

---

[1] Перед дальнейшим чтением этого очерка прочитайте по учебнику "Алгебра -7" о том, что такое верные значащие цифры.

нец, если получившаяся цифра изображает единицы, то говорят, что число имеет нулевой порядок. Так, например, число 328,73 ($\approx 3\cdot 10^2$) имеет порядок 2; число 5826,7($\approx 1\cdot 10^4$) - порядок 4, число 0,0435($\approx$0,04) порядок (-2), число 3,1415 ($\approx$3) - порядок 0.

Иногда бывает даже приемлемым, чтобы был сообщен правильно *лишь порядок* числа, притом допускается, чтобы даже ни одна значащая цифра не была сообщена. Так, например, обстоит дело, когда говорят, что какие-то животные " жили на Земле *несколько миллионов* лет тому назад".

Если требуется по возможности быстрее получить приближенно результат какого-нибудь расчета, и притом лишь с одной верной значащей цифрой, то можно вычисления упростить: например, если в расчете производятся лишь операции умножения и деления, то допустимо, вообще говоря, все исходные данные (перед началом вычислений) и все промежуточные результаты (появляющиеся в ходе вычислений) округлить, оставив в каждом из них только две, или даже одну, верную значащую цифру. Очень важно, производя прикидку, учитывать соображения здравого смысла, а не довольствоваться формальными правилами. Например, если вы умножаете несколько чисел и если при обычных правилах округления оказывается, что каждый сомножитель увеличивается, то лучше от этого правила отступить и один из сомножителей округлить не по избытку, а по недостатку.

Такая предварительная грубая оценка результата вычисления на основании округления исходных данных и промежуточных результатов называется п р и к и д к о й.

Прикидку полезно произвести и в тех случаях, когда нас интересует результат вычислений с *несколькими* верными значащими цифрами; в подобных случаях предварительная прикидка служит для контроля более громоздких вычислений с более точными данными.

Теперь давайте вернемся к задаче из Пролога.

- В минуте,- начала считать Ира, - 60 секунд, в часе - 60 минут, т.е 3600 секунд. В сутках 24 часа, т.е. секунд будет 3600 · 24·... В уме не сосчитаю...

- А ты округли промежуточные результаты, - подсказал Саша, и тогда легко сосчитать: $3600\approx 4\cdot 10^3$, $24\approx 2\cdot 10^1$, $3600\cdot 24\approx 8\cdot 10^4\approx 10^5$. А $3\cdot 1$млн$:10^5=3\cdot 10^6:10^5=30$. Маме пришлось бы ждать сына к обеду около месяца!

З а д а ч а 2. *Ваше сердце делает примерно 70 ударов в мину-*

ту. Прикиньте, сколько примерно ударов сделает оно в течение ближайших 50 лет Вашей жизни.

– В один час, – стал подсчитывать Максим, – сердце сделает ударов $70 \cdot 60 \approx 4 \cdot 10^3$; за сутки: $4 \cdot 10^3 \cdot 24 \approx 100 \cdot 10^3 = 10^5$, за год: $10^5 \cdot 365 \approx 10^5 \cdot 4 \cdot 10^2 = 4 \cdot 10^7$, за 50 лет:

$$4 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^1 = 2 \cdot 10^9 \text{ (ударов)}.$$

За 50 лет мое сердце сделает примерно 2 миллиарда ударов.

Задача 3. *Одному ученику потребовалось вычислить такую дробь:*

$$\frac{(8,71 - 2,15) \cdot 32 - 5,12}{8,17 - (2,19 + 4,26):2}$$

Он получил ответ: 374,83 . Верен ли этот ответ?

– Я, – сказал Игорь, – на самом деле ничего не буду записывать; всё, что скажу, я проделываю **устно:**

$2,19 + 4,26 \approx 6,4$, $6,4 : 2 = 3,2$; $8,17 - 3,2 \approx 5$;

$8,71 - 2,15 = 6,56 \approx 7$, $7 \times 32 \approx 200$. $200 - 5,12 \approx 200$;

$200/5 = 4 \cdot 10^1$. Итак, дробь приблизительно равна 40.

Вижу, что ответ, полученный учеником, - ошибочный.

Упражнения для размышления

1. Прикиньте, чему приблизительно равны следующие дроби:

а) $\frac{6497}{32}$, б) $\frac{652492}{32}$, в) $\frac{43,2 \cdot 76,4 \cdot 0,24}{2,63 \cdot 54,37}$, г) $\frac{6,13 \cdot 74 \cdot 0,628}{8,213}$

2. Прикиньте, сколько примерно секунд прошло с начала нашей эры.

***3.** Вот это выражение заимствовано из одной научной статьи известного физика Энрико Ферми:

$$U = \frac{0,25}{20} \cdot \frac{\sqrt{13}}{1,1} \cdot \frac{7,8 \cdot 10^4}{2,04 \cdot 10^5} \cdot \frac{2 \cdot 0,048}{0,021 + 0,019}$$

Прикиньте, чему оно примерно равно?

Ц И К Л III

В ПОИСКАХ ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА

В своей практической деятельности мы часто ставим себе задачу: при имеющихся в нашем распоряжении возможностях распорядиться ими так, чтобы в той или иной ситуации выбрать наилучший, самый выгодный (или,как говорят: оптимальный) вариант. Мы стремимся достичь стоящей перед нами конкретной цели,израсходовав по возможности меньше времени, материалов, электроэнергии и т.п.

Как выбрать из множества различных вариантов лучший? С математическими задачами такого рода мы будем знакомиться во время ближайших трех наших встреч.[1]

Встреча 8. Малый сдвиг и наилучший выбор

Вы спрашиваете: что делать,если
не знаешь, как решить задачу?
Отвечаю: отложите её в сторону
и начинайте решать другую задачу.

Из советов
Рассеянного Профессора

Пролог

З а д а ч а 1. *Из всех четырехугольников, вписанных в данную окружность (рис. 1), выберите такой, который имеет* **наибольшую** *площадь.*

---

[1] Сделаем одно замечание. При решении всех геометрических задач, рассмотренных на ближайших трёх встречах, мы не будем доказывать, что оптимальная, "наилучшая" фигура существует (хотя, строго говоря, этот факт нуждается в доказательстве); будем считать в каждом конкретном случае, что это уже установлено; а нам надлежит эту оптимальную фигуру л и ш ь н а й т и .

Задача 2. *Внутри угла BAC (рис. 2) расположена точка* **M**. *Как провести через нее прямую (а) так, чтобы она отсекла от это-*

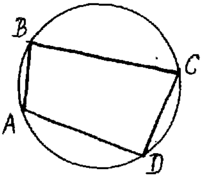

Рис. 1

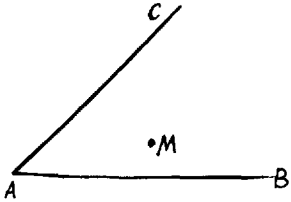

Рис. 2

го угла треугольник наименьшей площади?

–Один из простейших приемов в геометрии, позволяющих выявить из всех возможных вариантов "самый лучший" (оптимальный), состоит в следующем. Ты начинаешь с того, что выбираешь - более или менее произвольно - **какой-нибудь** вариант - и ставишь себе вопрос: "Не могу ли я, сдвинув, "пошевелив" немного, какую-нибудь точку (или несколько точек, или отрезок, или прямую и т.п.), этот вариант улучшить?" Если это тебе удастся сделать, ты затем - уже применительно к улучшенному варианту - ставишь себе *тот же* вопрос. Нередко случается, что повторив эту процедуру несколько раз, ты доберешься до такого варианта, который улучшить уже не удается. Правдоподобно, но не достоверно, что этот вариант и есть наилучший (оптимальный). Такой вывод можно считать окончательным лишь тогда, когда удается подкрепить его строгим доказательством.

Давайте применим этот подход к задаче N 1 из Пролога.

- Рассмотрю,- начал рассуждать Сережа, - какой-нибудь, наугад взятый, четырехугольник *ABCD*, вписанный в окружность(рис.1).Могу

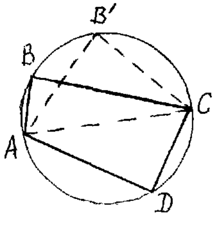

Рис.3

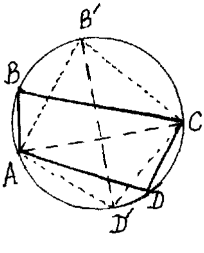

Рис.4

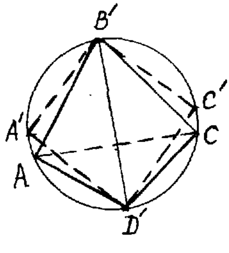

Рис.5

ли я его у л у ч ш и т ь , т.е. заменить его другим, тоже вписанным, четырехугольником **большей** площади? Конечно, могу: достаточно сдвинуть по окружности вершину *B* так, чтобы ее расстояние от хорды *AC* увеличилось; тогда увеличится площадь треугольника *ABC* - а, значит, и площадь всего четырехугольника *ABCD*. Наибольшего выигрыша в площади я достигну тогда, когда вершина *B* после сдвига совпадет с серединой *B'* дуги *ABC*. У четырехугольника *AB'CD* площадь будет больше, чем у исходного четырехугольника *ABCD* (рис.3). Так... А что делать дальше?

- А дальше, - подсказала Надя, - ты можешь еще улучшить новый четырехугольник *AB'CD*, можешь увеличить и его площадь.

- Конечно, - подхватил это соображение Максим. - Сдвинь по окружности вершину *D* так, чтобы она совпадала с серединой *D'* дуги *ADC*. Четырехугольник *AB'CD'* будет подавно иметь большую площадь, чем *ABCD* (рис. 4). И поглядите, ребята: диагональ *B'D'* - диаметр окружности.

- Можешь еще добавить, - заметила Ира: - " и притом - перпендикулярный хорде *AC*".

- А ведь новый четырехугольник *AB'CD'* можно еще улучшить! - обнаружил Гена.- Достаточно сдвинуть точки *A* и *C* в середины *A'* и *C'* дуг *B'AD'* и *B'CD'* - от этого площадь четырехугольника только увеличится - во всяком случае, не уменьшится (рис. 5).

- Так что же получается? - спросила Лена. - Что мы пришли к вписанному *квадрату*?

- Вот именно, - подтвердила Надя. - Мы получили, что у вписанного в окружность квадрата площадь больше, чем у вписанного четырехугольника *ABCD*, не являющегося квадратом.

- В таком случае, - заключил Максим, - ясен ответ к задаче N1 из Пролога: *Из всех четырехугольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.* Но наше рассуждение какое-то размазанное...

- Я хочу изложить к р а т к о е д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения, - попросил Толя. - Доказательство поведу "от противного". **Допущу**, что среди всех вписанных в данную окружность четырехугольников *наибольшую площадь имеет некоторый четырехугольник ABCD, отличный от квадрата* (рис. 1). Так как *ABCD* - не квадрат, то у него должны иметься две смежные неравные между собой стороны; без потери общности могу считать, что это *AB* и *BC* (если бы это было не так, то я переименовал бы вершины четырехугольника). Так как $AB \neq BC$, то точка B не совпадает с серединой B' дуги ABC. Но середина B' этой дуги дальше отстоит от хорды, стягивающей дугу, чем любая другая точка этой дуги (в частности - чем точка B). Поэтому площадь треугольника $AB'C$ больше площади треугольника ABC. Следовательно, у вписанного в ту же окружность *четырехугольника $AB'CD$ площадь больше, чем у четырехугольника $ABCD$*. А это противоречит допущению. Тем самым наше утверждение доказано.

- Хорошее доказательство, - оценил учитель рассуждение Толи. - Прежде, чем обратиться ко второй задаче из Пролога, предлагаю Вам обсудить другую задачу:

Задача 3. *Полуполоса - обозначу ее одной буквой: Φ (см. рис. 6) - ограничена отрезком BC и двумя параллельными лучами: BA и CD; точка M расположена внутри полосы, притом - ближе к прямой BA, чем к CD. Требуется провести через M прямую так, чтобы она имела общие точки с лучами BA и CD и отсекла бы от полосы Φ многоугольник наименьшей площади.*

- Да... - протянул Витя. - Совсем не ясно, как эта "наилучшая" прямая должна располагаться...

- Сначала, - внесла свое предложение Зарифа, - я бы провела *произвольную* прямую (назову ее a), пересекающую оба луча (рис 7); точки ее встречи с лучами BA и CD обозначу A_1 и D_1. Прямая A_1D_1 отсекает от полосы четырехугольник A_1BCD_1. Теперь я прямую a поверну вокруг точки M, но немножко, чуть-чуть, на малый уголок, и попытаюсь таким образом отсекаемый четырехугольник *улучшить* (т.е. получить четырехугольник *меньшей* площади). Это мне удастся сделать, если при повороте точка D_1 сдвинется по направлению к точке C. У меня на чертеже появится четырехугольник A_2BCD_2, площадь которого меньше, чем площадь четырехугольника A_1BCD_1.

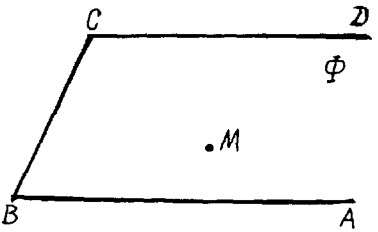

Рис.6

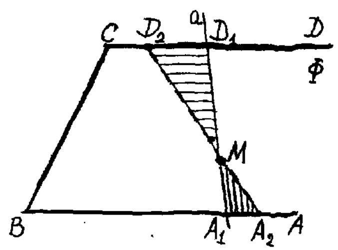

Рис.7

- Это почему же? ... - спросила Ира.

- Вот посмотри, - ответила Зарифа. - Чтобы получить четырехугольник A_2BCD_2 из четырехугольника A_1BCD_1, я должна от последнего отрезать горизонтально заштрихованный треугольник D_1MD_2 и приклеить вертикально заштрихованный треугольник A_1MA_2, причем мне ясно, что отрезать приходится здесь больше, чем приклеить; значит, новый четырехугольник (A_2BCD_2) имеет *меньшую* площадь, чем старый (A_1BCD_1). Это наверное можно доказать и строго, но на данном этапе, когда речь идет лишь о поиске *правдоподобного* ответа, это делать не нужно.

- Ну, хорошо, улучшила ты с помощью поворота отсеченный четырехугольник - что же из этого? - нетерпеливо спросил Игорь.

- А то, что я вновь полученный четырехугольник с помощью нового поворота могу еще улучшить - и это будет возможно до тех пор, пока прямая a не пройдет через точку C.

- Это, конечно, верное соображение, - кивнул Игорь. - Но что же оно дает?

- А то, что у меня возникает *подозрение*: раз мне не видно, как заменить прямую MC "лучшей" прямой, то не дает ли MC решение нашей задачи?

- Это еще доказать надо... - нахмурился Максим.

- Ты совершенно прав, - охотно согласилась Зарифа. - И хуже всего то, что я не вижу, как это сделать.

- Я бы это сделал так, - спокойно сказал Андрей. - Обозначу через F (рис. 8) точку встречи прямых CM и BA. Пусть a - *произвольная* прямая, проходящая через точку M и пересекающая лучи BA и CD; точки пересечения обозначу через A_1 и D_1. Докажу, что

$$\text{Пл. } A_1BCD_1 > \text{Пл. } BCF \qquad (1)$$

("Пл." означает: "площадь"). В самом деле,

$$\text{Пл. } A_1BCD_1 = \text{Пл. } A_1BCM + \text{Пл. } CMD_1, \qquad (2)$$

$$\text{Пл. } BCF = \text{Пл. } A_1BCM + \text{Пл. } FMA_1. \qquad (3)$$

Докажу, что

$$\text{Пл. } CMD_1 > \text{Пл. } FMA_1 \qquad (4)$$

В самом деле, поверну треугольник FMA_1 на 180° вокруг точки M; пусть он занял положение $F'MA_1$. Так как $FA_1 \parallel CD_1$, то и $F'A_1' \parallel CD_1$. А так как прямая FA_1 - по условию - ближе к точке M, чем прямая CD_1, то и $F'A_1'$ тоже ближе к точке M, чем прямая CD_1. Следовательно, треугольник $F'MA_1'$ - лишь *часть* треугольника CMD_1, и поэтому

$$\text{Пл. } CMD_1 > \text{Пл.} F'MA_1{}' = \text{Пл. } FMA_1,$$

то есть неравенство (4) верно. Но из (4), (2), (3) следует, что верно неравенство (1). А это и означает, что *среди всех рассматриваемых многоугольников наименьшую площадь действительно имеет треугольник BCF.*

- А как можно было бы найти наилучший многоугольник, если точка M была бы ближе к CD, чем к BA? -спросила Ира.

- Тогда, - ответил Сережа, - в наших рассуждениях лучи BA и CD поменялись бы местами, и оптимальный многоугольник мы бы получили, проведя прямую MB.

- А если точка M была бы *равноудалена* от прямых BA и CD? - не унималась Ира.

- Тогда, - откликнулся Саша, -*каждая* прямая, проходящая через M и пересекающая лучи BA и CD (рис. 9), будет наилучшей - каждая такая прямая отсекает от полосы многоугольник одной и той же площади.

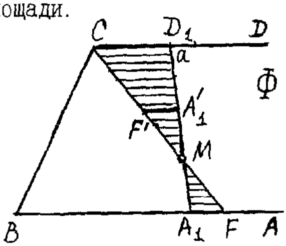

Рис. 8

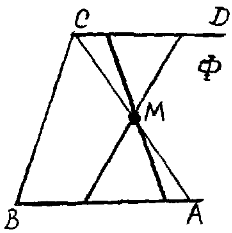

Рис. 9

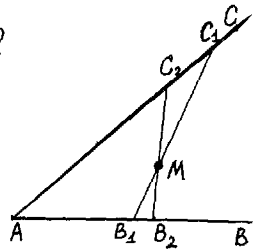

Рис. 10

- А теперь, - спросил Георгий Данилович, - как бы вы стали искать ответ к задаче N 2 из Пролога?

- Сначала, - сказал Гена, - проведу через точку M (рис.10) *произвольную* прямую B_1C_1 (B_1 - на луче AB, а C_1 - на луче AC). Эта прямая отсекает от угла BAC треугольник B_1AC_1. Спрашиваю себя: нельзя ли путем малого шевеления прямой B_1C_1 "улучшить" этот треугольник, т.е. получить треугольник с меньшей площадью? Пусть - для конкретности - $MB_1 < MC_1$. После поворота прямой B_1C_1 вокруг точки M на малый угол она займет положение B_2C_2. Пусть - опять-таки для конкретности - точка C_2 оказалась ближе к вершине A, чем точка C_1. Выясню: какой же треугольник окажется меньшим по площади: B_2AC_2 или B_1AC_1?

$$\text{Пл.} B_1AC_1 = \text{Пл. } B_1AC_2M + \text{Пл. } C_1MC_2,$$
$$\text{Пл.} B_2AC_2 = \text{Пл. } B_1AC_2M + \text{Пл. } B_1MB_2.$$

В случае, изображенном на моем рисунке, $MC_1 > MB_1$. При повороте прямой A_1B_1 вокруг точки M "чуть-чуть", на малый угол, отрезки MC_1 и MB_1 изменяются мало, и поэтому будет $MC_2 > MB_2$. Мне ясно (а над строгим доказательством я пока думать не буду), что

$$\text{Пл.} C_1MC_2 > \text{Пл.} B_1MB_2, \text{ и поэтому}$$

$$\text{Пл.} B_1AC_1 > \text{Пл.} B_2AC_2.$$

Вижу, что в случае, когда $MC_1 > MB_1$, можно треугольник B_1AC_1 **улучшить**, т.е. заменить треугольником B_2AC_2 меньшей площади. То же можно, видимо, сказать и в случае, когда $MB_1 > MC_1$ - ведь в условии задачи лучи AB и AC равноправны. Такая возможность "улучшения" треугольника B_1AC_1 исчезает, когда $MB_1 = MC_1$. П р а в д о п о д о б н о, что **возникающий именно в этом случае треугольник B_1AC_1 и окажется "наилучшим" треугольником.** Но это утверждение, конечно, еще нуждается в д о к а з а т е л ь с т в е.

- Попытайся, Игорь, доказать или опровергнуть гипотезу Гены, - сказал учитель.

- Я докажу, что Гена прав, - ответил Игорь.- Пусть прямая B_0C_0 (рис.11) проходит через точку M, причем точка B_0 - на луче AB, а C_0 - на AC; пусть $B_0M = C_0M$. Докажу, что AB_0C_0 - тот самый наилучший треугольник, который требуется найти в нашей задаче. Рассмотрю еще любую другую прямую $B'C'$, тоже проходящую через точку M, причем B' - на луче AB, C' - на луче AC и $MB' \neq MC'$. Пусть, для конкретности

$$MB' < MC'.$$

При повороте вокруг точки M на 180° треугольник MB_0B' займет положение MC_0Q; а треугольник MC_0Q составляет лишь **часть** треугольника MC_0C'. Поэтому

$$\text{Пл.} MC_0C' > \text{Пл.}\ MB_0B'.$$

А так как $\text{Пл.} B'AC' = \text{Пл.} B'AC_0M + \text{Пл.}\ MC_0C'$ и

$$\text{Пл.} B_0AC_0 = \text{Пл.} B'AC_0M + \text{Пл.}\ MB_0B', \text{ то}$$

$$\text{Пл.} B'AC' > \text{Пл.} B_0AC_0.$$

Аналогичное рассуждение пригодно и в другом возможном случае, когда $MC' < MB'$. Итак, доказано: Из всех рассматриваемых в нашей задаче треугольников **"наилучший" треугольник получается в том случае, когда на прямой a, проходящей через точку M, стороны данного угла BAC высекают такой отрезок B_0C_0, который делится точкой M пополам.**

- Теперь я хочу спросить, - обратился Георгий Данилович к школьникам, - как бы вы такую "наилучшую" прямую **построили** стандартным комплектом инструментов (циркулем и линейкой)?

- Требуется, - заговорил после некоторого размышления Саша, - через точку M провести прямую B_0C_0 (B_0 - на AB, C_0 - на AC) так, чтобы было $MB_0=MC_0$ (рис. 12). Проведу **анализ.** Если через M прове-

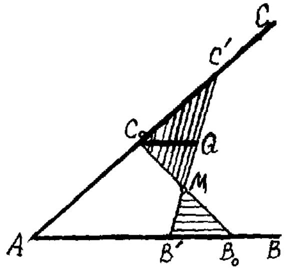

Рис. 11

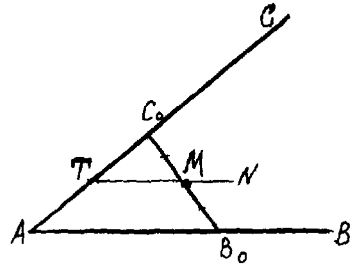

Рис. 12

сти прямую $MN \parallel AB$ и отметить точку T ее встречи с лучом AC, то отрезок MT окажется средней линией треугольника C_0AB_0, так что $AC_0 = 2AT$. Но точку T легко построить, и не зная точки C_0. Построив T, я затем с помощью формулы $AC_0=2AT$ сумею построить точку C_0, а затем - и точку B_0, и прямую B_0C_0.

Упражнения для размышления

1. В полуполосе $ABCD$ (рис. 6) на одинаковых расстояниях от прямых BA и CD находится точка M. Как провести через нее такую прямую, которая пересекла бы оба луча BA и CD и отсекла бы от полуполосы многоугольник наименьшего периметра?

Встреча 9. Геометрическая оптимизация (опорные факты)

Пролог

З а д а ч а 1. *Это произошло ещё в прошлом веке. Крестьянин Пахом, герой рассказа Л. Н. Толстого "Много ли человеку земли нужно", покупал у башкир землю. Цена была такая: за тысячу рублей ты получишь весь участок земли, периметр которого ты успеешь обойти* *за день - от рассвета до заката. За день Пахом обошёл контур трапеции, изображённой на рисунке 1 (длины сторон указаны в километрах). Пройденный им путь равен 43* км. *Убедитесь, что среди четырёхугольников с тем же периметром имеются такие, чьи площади больше площади этой трапеции. Какой из четырёхугольников с периметром, равным 43 км, имеет самую большую площадь?*

З а д а ч а 2. *Имеется прямоугольный лист жести длины* b *и ширины* a. *Из него требуется изготовить открытый желоб (без верхней стенки и без торцов) длины* b, *имеющий в поперечном сечении форму четырехугольника* (но, разумеется, без верхней стороны - см. рис. 2). *Какими должны быть форма и размеры этого четырехугольника, чтобы вместимость желоба (после того, как к нему будут прикреплены еще и торцевые стенки, изготовленные не из данного листа) была* ***наибольшей?***

-Сначала мы с вами сформулируем несколько **опорных фактов**, которые особенно часто используются при решении геометрических задач на оптимизацию.

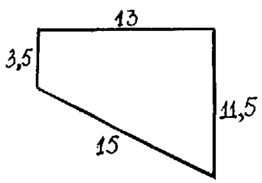

Рис. 1

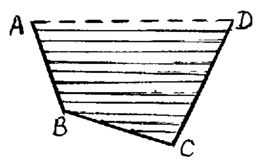

Рис. 2

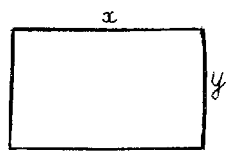

Рис. 3

Рассмотрим такую задачу.

З а д а ч а 3. *Среди всевозможных прямоугольников, чей обхват (то есть периметр) равен 26 метрам, выберите тот, который имеет самую большую площадь.*

-А разве все они не имеют одну и ту же площадь? - удивилась Лена. Ведь обхват у них - один и тот же!

-Это, конечно же, не так,- возразил Серёжа.- Обозначу (см. рис. 3) через x и y длины двух смежных сторон прямоугольника (в метрах). Тогда его площадь S равна $x.y$ ($м^2$), причём $x+y=13$. Возьму вытянутый прямоугольник: $x = 12$ (м), $y = 1$ (м). Его площадь равна 12 ($м^2$). А если возьму прямоугольник с тем же периметром, но со сторонами $x=6$ (м), $y=7$ (м), то получу прямоугольник с площадью 42 ($м^2$), то есть в три с половиной раза большей.

-Каким же должен быть ответ к нашей задаче? - спросила Лена.

-Мне кажется,- ответил Серёжа,- что искомый 4-угольник будет **квадратом**. Но не вижу, как это доказать.

Тут включился в разговор Саша.

- У нас речь идет о всевозможных парах положительных чисел x и y, для которых выполняется равенство $x+y=p$, где p - заданное число (а именно, 13). Для каждой такой пары рассматривается произведение $x \cdot y$; нас интересует та пара, для которой произведение будет самым большим. Для решения нам надо как-то связать произведение xy с суммой $x+y$. Это можно сделать, например, так:

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy.$$

Здесь участвует ненужное нам выражение x^2+y^2. Чтобы его исключить, учту ещё тождество

$$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy.$$

Из записанных двух равенств следует.

$$xy=[(x+y)^2-(x-y)^2]/4.$$

Но $x+y=p$. Поэтому

$$S=xy=[(p/2)^2-(x-y)^2]/4. \qquad (1)$$

Отсюда видно: если $x=y$, то $S=(p/2)^2$; а если $x\neq y$, то

$$S < (p/2)^2.$$

Следовательно, произведение $S=xy$ будет иметь наибольшее значение, когда прямоугольник является **квадратом** (рис.4). Во всех остальных случаях площадь прямоугольника будет меньше. В частности, среди прямоугольников с периметром 26 m наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 6,5 m, его площадь равна 42,25 m^2.

-Давайте,- предложил Георгий Данилович,- запомним этот факт:

I. *Среди всевозможных пар положительных чисел, имеющих заданную сумму,* ***наибольшее*** *произведение имеет та пара, у которой числа равны.*

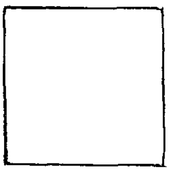

Рис. 4

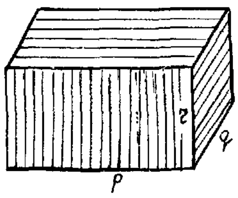

Рис. 5

Геометрический смысл этого факта: *из всех прямоугольников данного периметра (2p)* ***наибольшую*** *площадь имеет квадрат.*

-Хочу теперь сообщить вам ещё такой опорный факт:

II. *Среди всевозможных пар положительных чисел, имеющих заданное произведение, наименьшую сумму имеет только та пара, у которой числа равны.* Геометрический смысл: *из всех прямоугольников данной площади наименьший периметр имеет квадрат.*

-Это, очевидно, тоже следует из равенства (1), - обнаружил Гена, - Если $xy=S$, то $(x+y)^2=4S+(x-y)^2$. Отсюда видно, что при $x\neq y$ будет $(x+y)^2 > 4S$ (**строгое** неравенство!),

$x+y > 2\sqrt{S}$ (**строгое** неравенство!).

А при $x=y$ имеем уже р а в е н с т в а

$$(x+y)^2 = 4S, \quad x+y = 2\sqrt{S}$$

- А какие, - спросил Георгий Данилович, - утверждения, похожие на предложения I и II, представляются Вам правдоподобными для *троек* чисел?

- По-моему, - ответил Андрей, - очень напрашиваются такие сходные утверждения:

III. *Среди всевозможных троек положительных чисел, имеющих заданную сумму, наибольшее произведение имеет та, у которой эти числа равны между собой.*

IV. *Среди всевозможных троек положительных чисел, имеющих заданное произведение, наименьшую сумму имеет та тройка, у которой числа равны между собой.*

- Но, конечно, - закончил Андрей, - нет стопроцентной уверенности, что это так, пока не найдено доказательство. А как доказать - не ясно...

- Наиболее простой способ доказательства этих фактов, - разъяснил Георгий Данилович, - основан на таком тождестве

$$a^3+b^3+c^3-3abc = 0,5\ (a+b+c)\cdot((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2). \qquad (2)$$

- А как его проверить? Раскрыть скобки, что ли?-спросила Лена.

- Хотя бы и так. Отсюда видно, что если три числа a, b, c имеют положительную сумму и не все три равны между собой, то имеет место строгое неравенство

$$a^3+b^3+c^3 > 3abc. \qquad (3)$$

Если вы имеете три положительных числа x, y, z, из которых не все равны между собой, то можете подобрать три новых числа:

$$a=\sqrt[3]{x}, \quad b=\sqrt[3]{y}, \quad c=\sqrt[3]{z} \ ;$$

и тогда, в силу неравенства (3), вы получите такое неравенство:

$$x+y+z > 3\sqrt[3]{xyz}\,. \qquad (4)$$

– А отсюда легко следует утверждение III, – сказала Надя. – Действительно, если $x+y+z=p$ и не все числа x, y, z равны между собой, то в силу неравенства (4) имею:

$$xyz < (p/3)^3 \quad (\text{строгое неравенство!}) \qquad (5)$$

А если они все равны между собой и $x+y+z=p$, то, очевидно,

$$x=y=z=p/3, \quad xyz=(p/3)^3. \qquad (6)$$

Тем самым доказано, что утверждение III верно.

– Утверждение IY доказывается почти так же легко с помощью неравенства (4), – заметил Максим.

– Конечно,– согласился учитель. – Мы его сейчас и доказывать не станем. Проделайте сами дома необходимые выкладки.

З а д а ч а 4. *Рассматриваются (рис. 5) всевозможные прямоугольные параллелепипеды (закрытые коробки), имеющие заданную полную поверхность (S). Какая из этих коробок имеет наибольший объем (V)?*

– Я бы начал так рассуждать, – сказал Игорь. – Пусть p, q, r – три измерения коробки. Тогда

$$pq + qr + rp = S/2.$$

Согласно утверждению III я могу кое-что сказать о произведении трех чисел pq, qr, rp – а именно: их произведение $(pq\cdot qr\cdot rp)$ будет наибольшим, когда эти три числа равны –

$$pq=qr=rp, \text{ т.е. когда } p=q=r.$$

А чему же равно $(pq)\cdot(qr)\cdot(rp)$? Это ведь $(pqr)^2$, т.е. V^2.

– Итак, – продолжил Игорь, – величина V^2 будет наибольшей – а вместе с ней будет наибольшей и величина V – у той коробки, у которой все три измерения p, q, r равны между собой, то есть когда *коробка имеет форму куба.*

– Возьмем себе на заметку этот вывод:

Y. *Из всех прямоугольных параллелепипедов (закрытых коробок), имеющих заданную полную поверхность, наибольший объем имеет куб.*

Вот еще несколько полезных "опорных" фактов.

YI. Среди *всех треугольников, имеющих две стороны заданных длин a и b, наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны взаимно перпендикулярны (рис.6).*

– Это очевидно, – сказал Максим.– Ведь Пл.$A_1B_1C_1 = 0,5ab$,

$$\text{Пл. } ACB = 0,5a\cdot AD < 0,5.a\cdot AC = 0,5\,ab\ ,$$

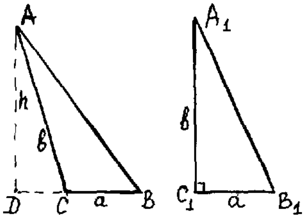

Рис. 6

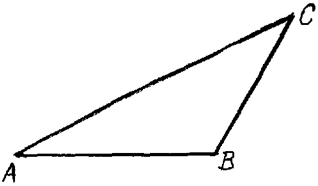

Рис.7

т.е. Пл ABC < Пл $A_1C_1B_1$.

YII. *Пусть n - заданное, фиксированное натуральное число (например, n=5). Из всех n-угольников, вписанных в заданную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.*

- Мы вроде бы встречали похожее утверждение, но для четырехугольников, - стал вспоминать Витя. - Но я не помню, как оно доказывалось.

- Утверждение YII можно доказать способом "от противного", - сообразил Вадим. - Пусть данное утверждение неверно. Тогда среди **неправильных** n-угольников, вписанных в данную окружность, найдется такой, который имеет **наибольшую** площадь; обозначу его так: *ABC*... Так как он - неправильный, то у него найдутся две неравные между собой соседние стороны - без потери общности можно считать, что это *AB* и *BC*. Так как $AB \neq BC$, то вершина *B* не служит серединой дуги *ABC*. Обозначу через *B'* середину этой дуги. Тогда точка *B'* дальше отстоит от хорды *AC*, чем точка *B*, и поэтому

пл.$AB'C$ > пл.ABC.

Но тогда у *n*-угольника *AB'C* ... (остальные вершины - те же,что у *n*-угольника *ABC*...) площадь **больше**, чем у *n*-угольника *ABC*... А это противоречит тому, что в силу допущения *n*-угольник *ABC*... имеет *наибольшую* возможную площадь. Значит, допущение неверно, утверждение YII доказано.

З а д а ч а 5. *Рассматриваются всевозможные треугольники (рис. 7), имеющие основанием один и тот же отрезок AB и одинаковую сумму боковых сторон (2a).Какой среди них имеет наибольшую площадь?*

- Мне почему-то кажется, - сказал Максим,- что таким будет **равнобедренный** треугольник...Но не представляю себе,как это можно было бы доказать.

- Как это доказать? - стал размышлять Сережа. - Я бы попытался применить способ "от противного": допустил бы, что среди всех рассматриваемых треугольников с основанием AB и суммой боковых сторон $2a$ наибольшую площадь имеет какой-то *неравнобедренный* треугольник ACB (рис.7); и затем попытался бы доказать, что это приводит к противоречию. Например, попытался бы доказать, что найдется *равнобедренный* треугольник с тем же основанием и той же суммой боковых сторон, но с большей площадью.

– Очень хорошая идея, - Георгию Даниловичу рассуждение Сережи явно понравилось. - Давайте, я начну ее реализовывать. Покажу, как здесь можно с пользой привлечь с и м м е т р и ю. Итак, допустим, как это предложил Сережа, что среди рассматриваемых треугольников "наилучшим" (т.е. имеющим наибольшую площадь) является некоторый **не**равнобедренный треугольник ACB (рис.8). Его площадь обозначим через S. Через вершину C проведу прямую MN, параллельную AB, и отмечу точку B_1, симметричную точке B относительно прямой MN. Тогда длина ломаной ACB_1 равна длине ломаной ACB. Прямые BB_1 и AB_1 встречают прямую MN в двух **различных** точках B_0 и C_2. Давайте присмотримся к треугольнику AC_2B.

– Во-первых, - заметил Гена, - он имеет такую же площадь, как треугольник ACB (потому что у этих двух треугольников одинаковые основания и одинаковые высоты).

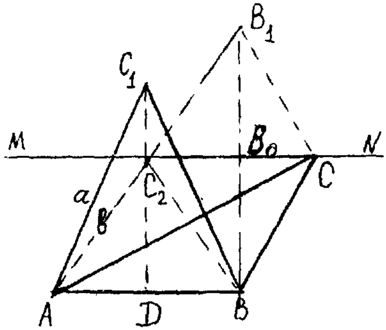

Рис.8

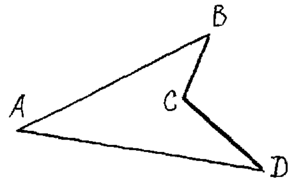

Рис. 9

– Во-вторых, добавила Надя, - он равнобедренный. И вот почему: так как точки B_1 и B симметричны относительно MN, то $BB_0=B_1B_0$; поэтому B_0C_2 – средняя линия треугольника AB_1B и $AC_2=C_2B_1$. Но $C_2B_1=C_2B$ (потому что точки B_1 и B симметричны относительно MN). Получаем: $AC_2=C_2B$, так что треугольник AC_2B –

действительно равнобедренный.

- В-третьих, - продолжил Сережа, - сумма его боковых сторон $AC_2+C_2B = AB_1 < AC+CB_1 = AC+CB = 2a$, т.е. $AC_2+C_2B<2a$. Видим, что в равнобедренном треугольнике AC_2B сумма боковых сторон меньше $2a$. Если обозначить длину его боковой стороны через b, то $b<a$. Итак, AC_2B - равнобедренный треугольник, который имеет площадь S и боковую сторону b, причем $b<a$. Я бы сопоставил этот треугольник AC_2B с другим равнобедренным треугольником AC_1B (рис. 8), имеющим то же основание AB, а боковую сторону длины a. Сопоставим высоты C_2D и C_1D треугольников AC_2B и AC_1B. Так как $a > b$, то $C_1D>C_2D$, и поэтому ясно, что пл. $AC_1B >$ пл. AC_2B, то есть пл. $AC_1B > S$.

Мы сконструировали такой треугольник (AC_1B) с основанием AB и суммой боковых сторон $2a$, у которого площадь больше, чем у треугольника ABC. А это противоречит допущению. Полученное противоречие доказывает, что допущение неверно. Тем самым нами доказано, что догадка Максима - правильная. Мы установили утверждение:

VIII. *Из всех треугольников с заданным основанием (AB) и заданной суммой длин боковых сторон (2a) наибольшую площадь имеет равнобедренный.*

- Приведенные выше опорные факты I - VIII, - сказал Георгий Данилович, - позволяют почти без всяких формул получить решения весьма трудных задач на оптимизацию, обычно решаемых с помощью довольно громоздких выкладок. Давайте решим с их помощью з а д а ч у 1 из Пролога.

-Вот как я стала бы её решать, - подняла руку Надя. - Поиск искомого наилучшего четырёхугольника (то есть имеющего наибольшую площадь) я бы начала так. Буду рассматривать всевозможные четырёхугольники с периметром 43 км. Среди них будут невыпуклые и выпуклые. Невыпуклый (см. рис. 9) наверняка не может оказаться наилучшим, потому что могу сопоставить ему другой четырёхугольник

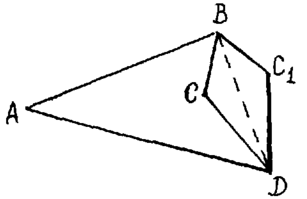

Рис. 10

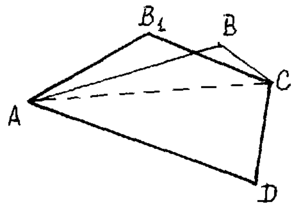

Рис. 11

(неважно - выпуклый или невыпуклый) с тем же периметром, но площадь которого больше (см. рис. 10, где точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD; ясно, что Пл. ABC_1D > Пл. ABCD). Следовательно, наилучший 4-угольник следует искать среди **выпуклых** четырёхугольников.

- Это верно, -согласился с ней Толя.- Я бы затем спросил себя: если у выпуклого 4-угольника имеются две **неравные** смежные стороны (как у трапеции, которую обошёл Пахом), то может ли он оказаться наилучшим? Допущу, что нашёлся такой 4-угольник ABCD (рис. 11), который является наилучшим, но в котором AB≠BC. Тогда треугольник ABC - неравнобедренный. Мне теперь приходит в голову опорный факт VIII: в нём площадь неравнобедренного треугольника сопоставлялась с площадью равнобедренного. Поэтому рассмотрю - помимо 4-угольника *ABCD* - ещё выпуклый 4-угольник AB_1CD, у которого $AB_1+B_1C=AB+BC$. Согласно опорному факту VIII

Пл. AB_1C > Пл. ABC и, следовательно, Пл. AB_1CD > Пл. ABCD.

Но тогда 4-угольник ABCD не является наилучшим - вопреки допущению. Итак, в наилучшем 4-угольнике любые две смежные стороны обязаны быть равными.

-Так что же получается? - спросила Лена.-Что наилучший 4-угольник обязан быть ромбом (рис. 12)?

-Именно так, - подтвердил Серёжа.- Четырёхугольник с периметром 43 км и наибольшей возможной площадью следует искать среди **ромбов** со стороной $a=43/4=10{,}75$ *км*.

-Но если *ABCD* - ромб, -стал рассуждать Максим, - то

Пл. ABCD=2 Пл. ABC.

А площадь треугольника ABC, у которого $BA=BC=a$, будет наибольшей, как мы знаем (вспомним опорный факт VI), когда угол *B* - прямой A в таком случае 4-угольник *ABCD* - квадрат (рис. 13).

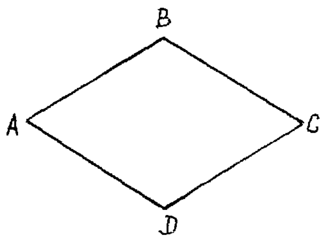

Рис. 12

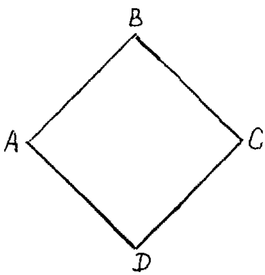

Рис. 13

Итак, из всех 4-угольников с периметром 43 км. наибольшую площадь имеет **квадрат**; его сторона равна *10,75 км*, а площадь равна 115,5626 км^2, что примерно на 18 км^2 больше площади трапеции, которую обошёл Пахом (97,5 км^2).

– Теперь, – предложил Георгий Данилович, – давайте обратимся к задаче 2 из Пролога.

Поиск решения задачи начала Зарифа:

– Задача, очевидно, сводится к следующей: Из всех четырехугольников *ABCD* (см. рис.2), у которых сумма длин сторон *AB*, *BC*, *CD* равна a, выбрать тот, который имеет **наибольшую** площадь.

– Правильно, – высказал свое согласие Витя. – Мне моя интуиция подсказывает: желоб следует изготовить так, чтобы многоугольник *ABCD* (в поперечном сечении желоба) был квадратом – как на рис. 14. Площадь этого сечения будет равна $S_{кв.} = a^2/9$. Вряд ли можно здесь добиться чего-либо лучшего. Или ты, Зарифа, другого мнения?

– Я не стала бы торопиться с прогнозами, – ответила Зарифа, – а попыталась бы рассуждать. Допущу, что искомый оптимальный четырехугольник *ABCD* уже найден (рис.2). Может ли оказаться, что в нем $AB \neq BC$? Если бы такое случилось, то я (см. рис.15), не меняя

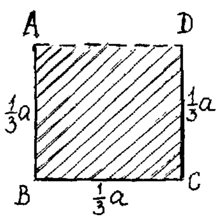

Рис. 14

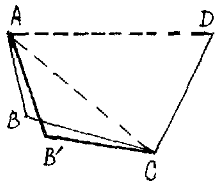

Рис. 15

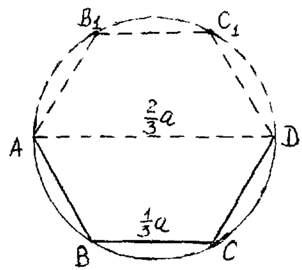

Рис. 16

положения вершин *A* и *C*, заменила бы треугольник *ABC* **равнобедренным** *(AB'C)* с тем же основанием *AC* и с той же суммой боковых сторон *(AB' + B'C = AB + BC)*. Треугольник *AB'C* имел бы (вспомните опорный факт VIII !) бóльшую площадь, чем треугольник *ABC*, а четырехугольник *AB'CD* – бóльшую площадь, чем четырехугольник *ABCD*. А это противоречило бы тому, что четырехугольник *ABCD* – оптимальный. Следовательно, в **оптимальном** четырехугольнике должно быть *AB=BC*. Аналогично можно убедиться, что в нем *BC=CD*.

Итак, в **оптимальном** варианте должно быть: $AB=BC=CD = a/3$.

- Вот видишь, - обрадовался Витя, - ты подтвердила то, что мне подсказала моя интуиция. Я уверен: всё должно получиться, как на моем рисунке (см. рис. 13).

- Сейчас мы это узнаем, - ответила уклончиво Зарифа. - Я бы присмотрелась к углу DBA (рис. 2). Если не трогать вершины D, C, B, то площадь треугольника ABD зависит только от величины угла DBA. Если этот угол оказался бы не равным $90°$, то я могла бы, поворачивая отрезок BA вокруг точки A, увеличить площадь треугольника DBA (а, значит, и всего четырехугольника $ABCD$).

Следовательно, в *оптимальном* случае $\angle DBA = 90°$. Аналогично, можно убедиться, что угол $\angle DCA$ - тоже прямой. Таким образом, в случае *оптимального* желоба точки B и C обязаны лежать на полуокружности с диаметром AD (рис. 16). Рассмотрю теперь, наряду с четырехугольником $ABCD$ (без верхней стороны AD), еще тот четырехугольник (AB_1C_1D), который симметричен четырехугольнику $ABCD$ относительно прямой AD. Шестиугольник $ABCDC_1B_1$ - правильный, вписанный в окружность диаметра AD и имеет периметр $2a$. Поэтому его стороны (а, значит, и радиус описанной окружности) составляет $a/3$. Выходит, - обратилась Зарифа к Вите, - что в оптимальном случае поперечное сечение должно иметь не форму квадрата, а форму равнобокой трапеции, представляющей собой половину правильного шестиугольника со стороной, равной $a/3$.

- Но выигрыш в площади - по сравнению с моим вариантом, - наверное, незначительный, - пытался еще сопротивляться Витя.

- Сейчас посмотрим. Полученная нами трапеция состоит из трех равных треугольников со стороной $p=a/3$. Чему же равна площадь такого треугольника? Вот я заглядываю в справочник и нахожу ответ: $(p^2\sqrt{3})/4$. *Значит, площадь нашей трапеции* ($S_{тр}$) *равна*

$$3\cdot(1/4)(a/3)^2\sqrt{3}\,,\ \text{т.е.}\ S_{тр} = (a^2\sqrt{3})/12.$$

А для случая квадратного сечения ты получил: $S_{кв} = a^2/9$.

$$\text{Поэтому}\ S_{тр}/S_{кв} = (3\sqrt{3})/4 \approx 1{,}3.$$

Как видишь, если выбрать не квадратное сечение, а трапецеидальное, то выигрыш составит около 30%. Его никак нельзя назвать "незначительным".

- Как же все-таки следует изготовить желоб наиболее выгодной формы? - спросила Лена.

- Вот какой способ вытекает из рассуждений Зарифы, - разъяснил Максим. - Следует лист жести разделить прямыми линиями на три одинаковые полосы (ширины $a/3$ и длины b) и по линиям деления согнуть их так, чтобы угол между любыми двумя (смежными) полосами оказался равным 120° (или, что то же: чтобы расстояние между наружными параллельными краями двух крайних из этих полос был вдвое больше ширины каждой полосы).

Упражнения для размышления

1. Из всех треугольников заданного периметра какой имеет наибольшую площадь? Ответ обосновать!

2. Из всех треугольников заданной площади S какой имеет наименьший периметр? Почему?

3. Вы располагаете проволокой длины a метров. Требуется отгородить у стены участок, имеющий четырехугольную (необязательно прямоугольную!) форму и наибольшую возможную площадь. Как бы вы это сделали?

4. Докажите опорное утверждение VIII с помощью формулы Герона.

Встреча 10. Геометрическая оптимизация и симметрия

Пролог

З а д а ч а 1. *Пластинка имеет форму четверти круга (рис. 1). Она ограничена двумя взаимно перпендикулярными радиусами OX и OY и четвертью окружности XmY. На дуге XmY выбираются две точки A_1 и B_1 и находятся их проекции A и B соответственно на радиусы OX и OY. При каком положении точек A_1 и B_1 на дуге XmY будет площадь многоугольника OAA_1B_1B наибольшей?*

З а д а ч а 2. *Требуется изготовить открытую коробку* (без крышки), *имеющую форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 2) –*

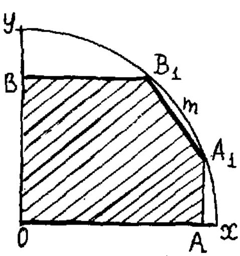

Рис. 1

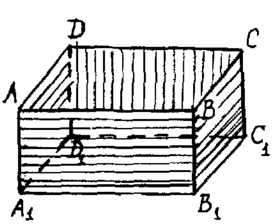

Рис. 2

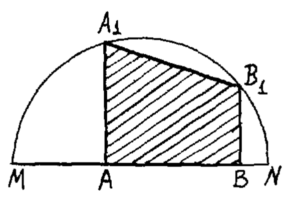

Рис. 3

так, чтобы ее поверхность была заданной (равна S), а объем был наибольшим. Какое должно быть соотношение между размерами коробки?

– Экономные и весьма наглядные приемы, позволяющие среди всех геометрических фигур, обладающих заданными свойствами, выбрать "самую лучшую", оптимальную, связаны с привлечением соображений **симметрии**. При этом могут пригодиться **опорные факты**, которые мы установили во время предыдущей встречи (Плакаты с их текстом вывешены в нашем классе). Решим такую задачу.

З а д а ч а 3. *На контуре полукруга (рис. 3) выбираются следующим образом четыре точки: A и B – на диаметре MN, а A_1 и B_1 – на полуокружности, причем A и B – ортогональные проекции точек A_1 и B_1 на MN. Каким образом следует выбрать точки A_1 и B_1, чтобы площадь четырехугольника A_1ABB_1 оказалась наибольшей?*

– Я бы так рассуждал, – сказал Вадим. – Пусть я уже нашел искомый *оптимальный* четырехугольник A_1ABB_1 (рис. 3), и пусть S – его площадь. Дополню его симметричным ему – относительно диаметра MN – четырехугольником A_2ABB_2 (рис. 4). Возникший новый четы-

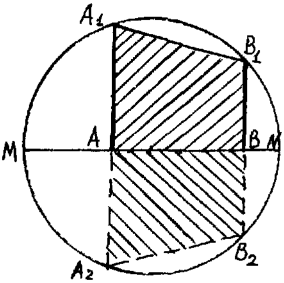

Рис. 4

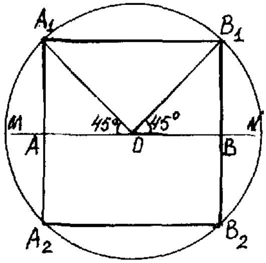

Рис. 5

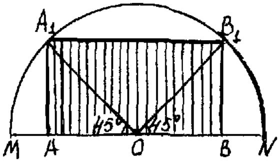

Рис. 6

рехугольник $A_1A_2B_2B_1$ – вписанный в окружность диаметра MN и имеющий две стороны, перпендикулярные этому диаметру. Площадь четырехугольника $A_1A_2B_2B_1$ вдвое больше площади четырехугольника A_1ABB_1. Но четырехугольник A_1ABB_1 – по допущению – *оптимальный*: он имеет *наибольшую* площадь среди всех четырехугольников, о которых говорится в условии задачи; поэтому четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ имеет наибольшую площадь среди всех четырехугольников, вписанных в окружность диаметра MN и имеющих две стороны, перпендикулярные MN. Но нам известно (я имею в виду опорное утверждение *VII*), что таким оптимальным четырехугольником является только квадрат (рис. 5). Следовательно, оптимальный для нашей задачи четырехугольник A_1ABB_1 обязан быть "полуквадратом" (т.е.

прямоугольником, у которого сторона AB вдвое больше сторон A_1A (см. рис. 6).

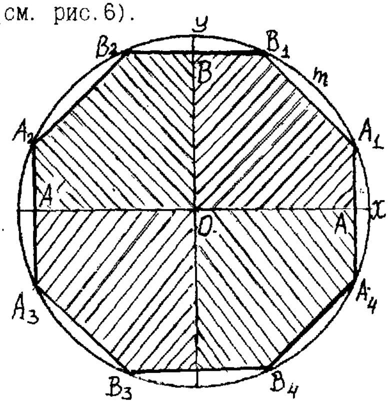

Рис. 7

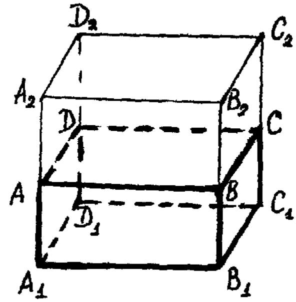

Рис. 8

– Разрешите, – обратился Игорь к Георгию Даниловичу, – я расскажу, как бы я стал решать задачу N 1 из Пролога.

Пусть мы уже нашли искомый оптимальный пятиугольник (рис. 1) OAA_1B_1B (короче: $O\ldots B$). Дополню (рис. 7) его симметричным ему относительно прямой OY пятиугольником $OA'A_2B_2B$; а полученный шестиугольник $AA_1B_1B_2A_2A'$ дополню симметричным ему относительно прямой OX шестиугольником $AA_4B_4B_3A_3A'$. Получу восьмиугольник $A_1B_1B_2A_2A_3B_3B_4A_4$ (короче: $A_1\ldots A_4$), вписанный в окружность; его площадь в 4 раза больше площади пятиугольника $O\ldots B$. Но так как последний – оптимальный (имеет наибольшую площадь среди всех пятиугольников, о которых говорится в условии задачи), то и восьмиугольник $A_1\ldots A_4$ должен иметь наибольшую площадь среди всех восьмиугольников, вписанных в окружность, у которых стороны A_1A_4 и A_2A_3 перпендикулярны радиусу OX. Но таким оптимальным восьмиугольником является п р а в и л ь н ы й (рис. 7). Следовательно, оптимальный для исходной задачи пятиугольник является "четвертью правильного восьмиугольника". Поэтому вершины A_1 и B_1 должны быть выбраны так, чтобы дуга $A_1mB_1 = 2\cdot$(дуга A_1X) $= 2\cdot$(дуга B_1Y) $= 45°$ (т.е. дуга A_1X = дуга $B_1Y = 22°30'$, дуга $A_1mB_1 = 45°$).

– А как бы нам теперь одолеть задачу 2 из Пролога? – спросил Георгий Данилович.

– Мы похожую задачу уже рассматривали для закрытой коробки, – вспомнил Толя. – Вряд ли здесь может сильно сказаться на ответе то, есть ли у коробки крышка или нет. Наверно, и среди открытых коробок наилучшей будет куб. Так мне кажется.

- Я бы стал рассуждать так,- начал сдержанно Саша. - Пусть (см. рис. 2) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (короче: $A\ldots D_1$) - искомая **оптимальная** коробка, причем крышка $ABCD$ отсутствует. Дополню (см. рис. 8) нашу *открытую* коробку такой же *открытой* коробкой $A\ldots D_2$, симметричной коробке $A\ldots D_1$ относительно плоскости $ABCD$ (у коробки $A\ldots D_2$ тоже нет крышки $ABCD$). Получу *закрытую* коробку $A_1\ldots D_2$, имеющую полную поверхность $2S$. Так как *открытая* коробка $A\ldots D_1$ должна иметь самый большой объем среди всех *открытых* коробок с поверхностью S, то *закрытая* коробка $A_1\ldots D_2$ обязана иметь наибольший объем среди всех *закрытых* коробок с полной поверхностью $2S$. Но мы уже знаем - об этом было сказано на нашей предыдущей встрече - вспомните опорное утверждение V, - что такой наилучшей закрытой коробкой является **куб**. Поэтому искомая нами *открытая* коробка обязана быть "**полукубом**", т.е. иметь форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием $(AB=AD)$ и высотой, вдвое меньшей стороны основания $(AA_1 = 0,5AB)$.

Упражнения для размышления

1. Требуется изготовить открытую коробку данного объема (V), но чтобы при этом израсходовать возможно меньше материала. Какими предлагаете вы выбрать размеры коробки?

Советы и ответы

Встреча 1. **1**.37. **2**.а)28; б)7; в)38. **3**.Нет. Допустите противное и получите противоречие с теоремой о сумме внешних углов выпуклого многоугольника. **4**.Воспользуйтесь тем, что в тупоугольном и прямоугольном треугольниках (при $c > b$ и $c > a$) $c^2 \geqslant b^2+a^2$, и поэтому $c^3 \geqslant cb^2+ca^2 > b^3+a^3$. **5**.Примите длину стороны одной клетки за 1 единицу. Покажите, что площадь равностороннего треугольника ABC с вершинами в вершинах клеток должна выражаться *иррациональным* числом (для этого воспользуйтесь формулой для площади правильного треугольника). С другой стороны, покажите, что площадь любого треугольника с вершинами в вершинах клеток выражается *рациональным* числом. Сделайте вывод из полученного противоречия.

Встреча 2. **1**.Все 33 числа, записанные Ирой, можно поместить в

32 ящиках - так, чтобы в каждом ящике оказались числа, дающие при делении на 33 один и тот же остаток. Хотя бы в одном ящике окажутся хотя бы два числа; их разность разделится на 33.

2. В ящик N 1 поместим те числа (из записанных на листочке), у которых наибольший нечётный делитель равен 1 (это будут числа: $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$ и т.д.); в ящик N 2 поместим те числа, у которых наибольший нечётный делитель равен 3 (это будут: $3,\ 3\cdot 2,\ 3\cdot 2^2$ и т.д.); и т.д. Всех нечётных чисел, меньших 1000, имеется 500. Поэтому всех ящиков будет 500. А так как чисел на листке 510, то хотя бы в одном ящике окажется не меньше двух чисел; они имеют вид $p\cdot 2^k$ и $p\cdot 2^n$; понятно, что одно из них разделится на другое.

Встреча 3. **1.** 1024. **2.** 22.

Встреча 5. **1.** Равенство неверно. Воспользуйтесь тем, что пятая степень натурального числа и само это число (в десятичной записи) оканчиваются одной и той же цифрой (см. З а д а ч у 4).

2. Воспользуйтесь тем, что квадрат чётного числа делится на 4 нацело, а рассматриваемая сумма при делении на 4 дает остаток 2.

3. Воспользуйтесь тождеством: $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$.

4. Воспользуйтесь тождеством $(a^2+b^2)/2=[(a+b)/2]^2+[(a-b)/2]^2$.

5. Сначала докажите: если сумма трех целых чисел a, b, c делится на 6, то хотя бы одно из них четно. Без потери общности можем считать, что таким числом является число a. Затем воспользуйтесь тождеством: $(a+b)^3+c^3 = a^3+ b^3+ c^3+ 3ab(a+b)$. Обратите внимание: левая часть делится на $a+b+c$, а $3a$ делится на 6.

6. Воспользуйтесь тем, что $U_n = (1+2n^2+n^4)-n^2$.

7. Допустите, что *хотя бы одно* из чисел x, y не делится на 3. По условию существуют такие натуральные числа a и b, что $x=a^2$, $y=b^2$. Так как (по допущению) x не делится на 3, то и a не делится на 3, т.е. a имеет вид: $a=3k\pm1$, где k - некоторое целое число. Поэтому: $x=a^2=9k^2\pm6k+1 = 3(3k^2\pm2k)+1$.

Видим, что x при делении **на 3** *дает остаток* 1. Что касается числа b, то оно имеет вид $b=3m$, либо $b=3m\pm1$. Убедитесь, что в первом случае число y (то есть b^2) делится на 3 нацело, а во втором случае y дает при делении на 3 остаток 1. После этого докажите, что в обоих случаях сумма $x+y$ не может разделиться на 3 без остатка. Убедитесь, что ваше допущение привело к противоречию.

Встреча 9. **1.** Для решения можно воспользоваться опорным фактом VIII. Другой путь - воспользоваться формулой Герона. Пусть ABC (короче: T) - произвольный треугольник; a, b, c - длины его сторон ($a + b + c = 2p$). В дальнейшем $P(T)$ и $S(T)$ обозначают периметр и площадь треугольника T (ABC). Рассмотрим всевозможные треугольники T с **заданным** периметром $2p$.

По формуле Герона имеем $[S(T)]^2 = p\,(p-a)(p-b)(p-c)$, т.е. $[S(T)]^2/p = x.y.z$, где $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$. Отсюда видно, что $x + y + z = 3p - (a + b + c) = p = const$. В силу опорного факта Y111 произведение $x \cdot y \cdot z$ будет наибольшим тогда и только тогда, когда $x = y = z$, т.е. $p - a = p - b = p - c$, т.е. при $a = b = c$. Видим, что величина $[S(T)]^2/p$ - а вместе с нею и $S(T)$ - будет иметь *наибольшее* возможное значение тогда и только тогда, когда $a = b = c$, т.е. когда треугольник T - правильный.

2. Доказательство проведите способом "от противного". **Допустите**, что среди всевозможных треугольников Т с заданной площадью S *наименьший* периметр имеет какой-то **не**правильный треугольник T (он изображен на рис.1). Рассмотрим еще два вспомогательных правильных треугольника : $T_{лев.}$ и $T_{пр.}$ (на рисунке 1 первый изображён слева от T, а второй - справа), обладающие такими свойствами:

$$S(T_{лев.}) = S(T),\quad P(T_{пр.}) = P(T).$$

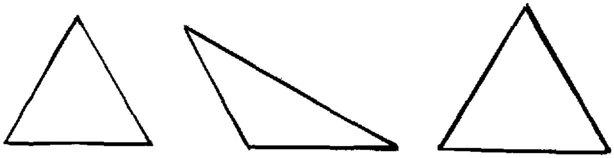

Рис.1

В силу нашего допущения имеем:

$$P(T_{л.}) > P(T).$$

А в силу решения упражнения 1 имеем:

$$S(T) < S(T_{пр.}).$$

Из четырёх записанных здесь соотношений следуют такие неравенства для правильных треугольников $T_{л.}$ и $T_{пр.}$:

$$P(T_{л.}) > P(T_{пр.}), \qquad (*)$$

$$S(T_{л.}) < S(T_{пр.}). \qquad (**)$$

Обозначим длины сторон правильных треугольников $T_{л.}$ и $T_{пр.}$ соответственно через $a_{лев.}$ и $a_{пр.}$.

Из неравенства (*) следует, что $a_{лев.} > a_{пр.}$;

а из неравенства (**) - что $a_{лев.} < a_{пр}$.

Мы пришли к противоречию. Следовательно, наше допущение не верно , и утверждение из упражнения 2 доказано.

3. Дополните мысленно отгороженный участок (четырехугольник) другим, симметричным ему относительно стены, четырехугольником. Докажите, что искомый четырехугольник - трапеция, представляющая собой половину правильного шестиугольника.

4. Рассмотрите всевозможные треугольники (T), имеющие заданное основание AB ($AB = c$) и заданную сумму боковых сторон ($2d$).

$$CA = CB = b + a = 2d = const$$

Для каждого такого треугольника имеем: $P(T)=a + b + c=c + 2d$.

По формуле Герона получаем

$$[S(T)]^2/[p(p-c)] = x \cdot y, \qquad (*)$$

где $x = p-a$, $y = p-b$, $x + y = 2p - (a+b)$, т.е. $x + y = c = const$ (т.е. **не** зависит от выбора треугольника T).

В силу опорного факта I заключаем, что произведение $x \cdot y$ будет иметь наибольшее значение, когда $x = y$, т.е. $p - a = p - b$, т.е. когда $a = b$. Из равенства (*) видно, что в этом случае величина $S(T)$ будет наибольшей. Иными словами, из всех рассматриваемых треугольников T наибольшую возможную площадь имеет равнобедренный.

Встреча 10. 1. Коробка - "половина куба".

П р и л о ж е н и е

Оглавление третьей части книги "Математические встречи"